✠

CONSIDERACIONES FISICO-MATHEMATICAS

SOBRE

DIFERENTES PUNTOS

DE MECÁNICA É HIDRÁULICA

que, por via de suplemento à las obras elementales,

DISPUSO

DON PEDRO HENRY,

CATEDRÁTICO DE MATHEMÁTICAS para mayor ilustracion de los alumnos de su Clase.

CON LICENCIA.

En Sevilla: En la Oficina de Vazquez, Hidalgo, y Compañía. Año de 1789.

DEDICACION

A LA REAL SOCIEDAD PATRIOTICA DE SEVILLA.

SEÑOR:



EL honor de ser miembro de un Cuerpo tan celoso del bien público, me ha estímulado à hacer todos los esfuerzos posibles para merecerlo.

Uno

Uno de ellos es la presente obra, que pareciendo baxo la proteccion de VS. será un testimonio y prueva de su amor à estas Ciencias y del deseo que tiene de su fomento y propagacion. Dignese VS. de recibir este obsequio dictado no menos por mi reconocimiento que por la imitacion de su zelo, el que con el mayor rendimiento ofrece

su mas humilde servidor

Pedro Henry.

PROLOGO.

DESDE que fui destinado por S. M. para enseñar las Ciencias Mathemáticas en esta Ciudad , baxo la direccion de la Sociedad Patriótica de ella, me propuse ceñir à tres años cada curso de estas Ciencias , tiempo comunmente adoptado para infundir à los discipulos un conocimiento de ellas que sea suficiente para desempeñar los destinos à que despues se apliquen , y ponerlos en el camino de hacer por sí mayores progresos.

Deseando ademas poner en uso , en quanto lo permitiesen las circunstancias, el método que yo havia seguido en el Real Cuerpo de Ingenieros de Puentes y Caminos de Francia en que estuve de Catedrático de estas Ciencias por espacio de quatro años, y fue admitido con algun aplauso ; dicté en el primer año buena parte de las lecciones que pensaba dar: pero advirtiendo el fastidio que causaba à los alumnos el trabajo de escribir , y

que por ello se retrahian muchos del estudio, determiné dar en lo sucesivo por alguno de los tratados que huviese impresos en el idioma patrio, y son la obra de Don Carlos Le-Maur, la grande de Don Benito Bails, el compendio de éste, y el que pocos años ha publicó Don Juan Justo Garcia; tratando el primero de la Arithmética, Algebra, Geometría y ambas Trigonometrías; el segundo de todos los ramos de las Mathemáticas puras y mixtas, y el ultimo solamente de las puras.

No pudiendo darse en la clase por la obra grande del citado Don Benito Bails, pues su extensìon pasa de los límites que puedan ceñirse en los términos de un curso de tres años; ni por el tratado de Le-Maur, sin embargo de su gran mérito, por ser demasiado profundo para principiantes, que por lo comun se presentan sin tener la menor idea de lo que son Mathemáticas: los compendios de Don Juan Justo Garcia, y de D. Benito Bails me parecieron mas al propósito para la duracion de un curso en el modo

que

que se havia determinado: en cuya consequencia desde el segundo año resolví enseñar por ellos ; persuadido de que la aplicacion y progresos de mis discipulos me obligaría à aumentar algo el aparato de Mathemáticas puras, y mucho mas el de las mixtas, con especialidad en la Mecánica è Hidráulica en que está diminuto el referido compendio, y falto de muchas cosas esenciales para los que al salir de las clases han de entrar à manejar las obras de Autores mas profundos.

Dispuse, pues, este suplemento que les sirviese de aparato, y el fruto que de su enseñanza ha resultado y se ha hecho manifiesto en los Exâmenes públicos celebrados à presencia de la Real Sociedad, ha movido à este sabio cuerpo à acordar su impresion, y contribuir à ella.

Las materias que en èl se tratan son las siguientes: Una breve exposicion de los movimientos aparentes ò relativos: la comunicacion del movimiento por medio del choque directo y obliquo: la aplicacion del metodo de los momentos à la indagacion de las resultantes de varias

rias potencias que obrando en distintos puntos de un sistema de cuerpos obran tambien en qualesquiera direcciones: la Teoría del Rozamiento en las máquinas que giran al rededor de un exe: la del movimiento uniformemente acelerado y retardado, en la caída libre y en planos inclinados. La indagacion de la relacion entre espacio, tiempo y velocidad en los movimientos variados: la Teoría de los movimientos en linea curva; su aplicacion à los tiros por elevacion en el vacío, y à algunas de las propiedades mas generales de las Trayectorias descritas por los Astros: la de los movimientos de rotacion, angulos giratorios, centros de conversion en un sistema libre de cuerpos, centros de oscilacion en los Pendulos, con la naturaleza y efectos de las fuerzas aceleratrices en los movimientos de rotacion con consideraciones fisico-mathemáticas sobre el modo de medir la resistencia de los fluidos al movimiento de los sólidos sumergidos en ellos. La aplicacion de esta doctrina al ascenso y descenso vertical de los graves

en

en el medio resistente incompresible; al ascenso y descenso vertical en un medio elástico; al movimiento obliquo en este ultimo medio; à la indagacion del alcance de las balas arrojadas baxo qualesquiera inclinaciones; de donde se deduce que para lograr el máximo de este alcance, la inclinacion del tiro de ningun modo puede ser la de 45 gr. la indagacion del tiempo que emplea en vaciarse un vaso de una figura geometrica, lleno de un licor hasta una altura dada: la aplicacion de la teoría de la presion de los fluidos contenidos en vasos flexibles, inextensibles, y pesados, à la indagacion de la naturaleza de las curvas llamadas *Lintearia* y *Cadenaria*, como tambien de los gruesos que deben darse à los caños de comunicacion, para que puedan resistir al impulso del fluido que encierran: la indagacion de la forma que debe darse à un dique para no emplear en su construccicn mas que la cantidad justa de material que necesite para equilibrarse con el impulso de las aguas que se hayan de atajar: algunas reflexiones sobre

la

la construccion de las obras hidráulicas en general, y el cálculo de la fuerza de una rueda de alas ò aspas movida por una corriente. Concluyendo todos estos tratados con reflexîones sobre el modo con que en algunas ocasiones pueden modificarse las fórmulas que expresan la resistencia de los fluidos al movimiento de los sólidos, para hacerlas mas conformes à lo real y práctico.

Si en esta obrita contradigo en algunos puntos à Autores célebres, espero que el Público inteligente me hará la justicia de creer que solo el amor de la verdad es el que me ha movido à ello. Uno de estos puntos es el del Rozamiento en las máquinas de rotacion; en èl pienso haver demonstrado mi parecer de un modo concluyente. Otro punto digno de atencion por el influxo que tiene en un ramo tan esencial como es el de la construccion y maniobra del Navio, es el cotejo que yo hago de los sistemas de Hidráulica de Newton y de Don Jorge Juan. Aunque el modo de resistir de los fluidos al movimiento de los sólidos es

una

una materia tan oculta todavía, que hasta aqui no la hayan podido penetrar con la exâctitud que sería de desear los ingenios mas perspicaces; sin embargo me persuado que en materia tan oscura, con las razones que refiero, se pueda à lo menos decídir qual de los dos sistemas que acabo de citar se aproxîma mas al verdadero modo de obrar de la Naturaleza. El tratado de Artillería tan justamente celebrado de Benjamin Robins, comentado por Leonardo Eulero, dexa poco que desear en los ramos que trata, en quanto alcanza la destreza en inventar y executar experimentos al propósito para el caso, y en el manejo del calculo: pero esta materia tratada con sublimidad por estos dos célebres Mathemáticos, por lo mismo se hace poco asequible al comun de los que mas necesitan de su inteligencia: en el ramo de los tiros por elevacion en el medio resistente, por el rumbo que he elegido, creo haver simplificado el asunto de tal modo que, sin apartarme de lo real y práctico mas que con otras qualesquiera de las teorías conocidas, he podido ha-

cer

cer este punto verdaderamente curioso, perceptible à qualesquiera principiantes aprovechados. La Teoría de los tiros por elevacion en el vacío es al pie de la letra la del Abate La-Caille. En la de los movimientos de rotacion y pendulos tampoco hai novedad, sino es tal vez el modo con que la he tratado, que creo ser algo mas perceptible que lo que se halla comunmente en los autores de elementos. En fin en la Teoría de la fuerza de una rueda de alas movida por una corriente, hago una observacion importante, que podrá servir à perfeccionar la misma materia tratada con prolixidad y elegancia por el Abate Bossut. En todo he procurado la claridad quanto me ha sido posible: los progresos en la enseñanza de las Mathemáticas mixtas son el único fin que me ha movido à escribir: si con la publicacion de esta obra logro alguna mas perfeccion en esta enseñanza, havré alcanzado quanto deseaba.

SUPLEMENTO
AL COMPENDIO DE MECANICA
DE DON BENITO BAILS.

DEL MOVIMIENTO APARENTE, ò relativo.

1. LLamase movimiento aparente aquel que atribuye un observador à un objeto en movimiento ò en reposo, teniendo por sí este observador un movimiento propio, y creyendo estarse quieto en un sitio determinado, ò tener otro movimiento de el que efectivamente tiene.

2. Diferenciase el movimiento relativo de la velocidad relativa, en que esta es la cantidad de que se apartan uno de otro, en una unidad de tiempo, dos cuerpos, sin atender à su direccion.

PROPOSICION I.

3. CON esta definicion del movimiento aparente; dado el movimiento verdadero de un observador, y el sitio donde cree estarse en quietud este observador, que por esta razon se llama *sitio imaginario* del observador; se determinará con facilidad el movimiento aparente del objeto; pues para cada instante, el sitio verdadero del observador, el del objeto, el imaginario de aquel, y el aparente de este, deben

formar un paralelogramo, y en este ser conocida la posicion de tres de sus quatro angulos.

Fig. 1. Para entender esto con claridad bastarà con el exemplo siguiente; sea AB el camino corrido por un objeto en un tiempo dado, y CD el corrido por un observador en el mismo tiempo, creyendose este observador quieto en E: junto en primer lugar por una recta AC la posicion A del objeto con la C del observador al principio del movimiento; y por el sitio imaginario E del observador otra EF igual, y paralela à CA, formando así con CA el paralelogramo ACEF; será F el sitio aparente del objeto para este primer instante: del mismo modo, supuesto q̃ en el tiempo que el objeto ha corrido AB, es CD el espacio corrido por el observador, estando este en D, estará el objeto en B; tirando pues DB, y por el sitio imaginario E la paralela EG=DB; será G el sitio aparente del objeto para este segundo instante, y por consiguiente será FG el camino aparente corrido por el objeto en las circunstancias propuestas.

Corolario primero.

4. Estando siempre en los quatro angulos de un paralelogramo, estas quatro situaciones: primera, la verdadera del objeto: segunda, la verdadera del observador: tercera, la imaginaria de este: quarta, la aparente de aquel, es evidente que de estas mismas quatro cosas tres siendo dadas, por la Geometria simple se hallará siempre la posicion de la quarta.

Corolario segundo.

5. Si el movimiento del objeto fuera curvilineo, como tambien el del observador, imaginandose

dose este estar quieto en el centro de estos movimientos; para hallar à cada instante la situacion aparente del objeto, se repartirá el movimiento verdadero de este en partes suficientemente pequeñas para poder reputarse estas rectilineas; haciendo lo propio sobre el movimiento verdadero del observador, con la precisa condicion de ser cada trozo de espacio correspondiente à ambos cuerpos, corrido en el mismo tiempo: resolviendo despues la qüestion en el modo que acabamos de exponer, para cada par de trozos correspondientes, y haciendo pasar una curva por todos los sitios aparentes del objèto así determinados, será esta curva el camino aparente del objeto respecto al observador.

Corolario tercero.

6. Quando el objeto se está quieto, y el observador en movimiento circular ò elyptico, creyendo estarse quieto en el centro de su propio movimiento; el movimiento aparente del objeto es un circulo ò una elipse igual y paralela al camino descrito por el observador; formando así el camino verdadero del observador, y el aparente del objeto un cilindro cuyo exe pasa por el sitio verdadero del objeto, y el imaginario del observador.

7. Por el segundo de estos tres corolarios se determina la figura de lo que en Astronomia llaman los *Epicicloides* de los Planetas, y no son otra cosa que el camino aparente de estos, respecto à un observador que puesto en la superficie de la tierra se cree estár en el centro del movimiento de estos Planetas. Y por el tercero se halla la *Paralaxe* anua de los astros, ò el angulo que forma en el ojo del observador el sitio verdadero y el aparente del objeto; esto es el angulo

baxo

baxo el qual aparece el semidiametro de la orbita anua de la tierra à la distancia del astro.

DE LA COMUNICACION DEL MOVIMIENTO por medio del choque.

8. LOS cuerpos suelen dividirse en blandos, duros y elasticos. Un cuerpo perfectamente blando sería aquel cuyas partes cedieran à qualquiera impresion, sin resistir cada molecula de el mas que por su inercia y sin adhesion alguna con las moleculas que le son contiguas: pero como en la Naturaleza no se conoce porcion alguna de materia que no esté sujeta à las leyes de la gravitacion universal, se sigue que en la Naturaleza no existen ò à lo menos no se conocen cuerpos perfectamente blandos.

9. Un cuerpo perfectamente duro sería aquel cuyas partes no mudarian su situacion respectiva, por grande que sea la impulsion que recibiera este cuerpo en qualquier parte de su superficie; esto es, cuya figura no pudiera mudarse si no es por una impulsion infinita. Tampoco se conoce semejante cuerpo en la Naturaleza.

10. Cuerpo perfectamente elastico es aquel que à modo de un muelle habiendo mudado su figura cediendo à la impulsion de otro cuerpo, se restituye à su primitiva figura con la misma fuerza que ha sido necesaria para comprimirle. Aunque en la Naturaleza los cuerpos que manejamos parecen todos participar mas ò menos de las tres calidades de blandura, dureza, y elasticidad, sin embargo por los efectos que se observan en la luz, se cree que sus moleculas tengan la propiedad de ser perfectamente elasticas.

11. A mas de que es inutil tratar de la comunica-

nicacion del movimiento en los cuerpos perfectamente blandos y en los perfectamente duros, pues que no exîsten estos cuerpos en la Naturaleza; parece que esta comunicacion del movimiento se hace imposible en los ultimos, à lo menos si es cierto el principio de que la Naturaleza en todas sus operaciones procede por grados infinitamente pequeños: con efecto, si se supone que dos de estos cuerpos andan en una misma direccion con velocidades desiguales, es evidente que al punto de chocarse, debe inmediatamente suceder despues una de dos cosas, ò pasar el cuerpo chocado de la velocidad que tenia à otra mayor que esta primitiva de una cantidad finita, y el chocante de su velocidad primitiva à otra menor, igualandose así ambas velocidades en un instante indivisible, lo que es contra el principio que acabamos de sentar: ò si el chocante vá perdiendo de su velocidad por grados infinitamente pequeños, y el chocado aumentando la suya del mismo modo; como en este caso, interin no se igualen ambas velocidades, resulta que la velocidad del cuerpo chocado permanece menor que la del chocante; para que esto pueda verificarse es necesario que los centros de estos cuerpos sigan aproxímandose uno à otro aun despues del contacto; lo que supone ò compresion en la superficie de estos cuerpos, ò penetracion de uno en otro, lo segundo es imposible por sí, y lo primero tambien por el supuesto de la dureza: luego, &c. Solo queda pues que exâminar la comunicacion del movimiento en los cuerpos perfectamente elasticos; para lo qual estableceremos el principio siguiente.

PRO-

PROPOSICION II.

12. DEL principio recibido en la Mecanica que los efectos son proporcionales à sus causas, se sigue que en el choque de los cuerpos la cantidad de movimiento antes, interin, y despues del choque es siempre la misma; esto es que al paso que el cuerpo chocante irá perdiendo un grado de su fuerza, el propio irá adquiriendo el chocado: y es este *el principio de la conservacion de las fuerzas vivas.*

13. De este principio se sigue que la mutacion de velocidades, interin el choque, debe ser en ambos cuerpos en razon reciproca de sus masas; acercandose uno à otro sus centros, y comprimiendose sus superficies, interin quede la velocidad del chocante mayor que la del chocado, hasta que igualandose una con otra ambas velocidades en cuyo punto ha llegado la compresion à su maximo, la fuerza de restitucion, que aqui se supone igual à la de compresion, obrando hasta el fin del choque en que se separan los cuerpos, produzca en ambos la misma mutacion en sus velocidades que habian padecido desde el principio hasta el medio del choque.

PROBLEMA I.

14. ESTO entendido y suponiendo que dos cuerpos esfericos perfectamente elasticos siguen una misma direccion; dadas la masa y velocidad de estos cuerpos antes del choque, se pide en primer lugar qual ha de ser la velocidad de estos cuerpos al tiempo de igualarse sus velocidades.

Solucion. Sean M y V la masa y velocidad del cuer-

cuerpo chocante, m y u la masa y velocidad del chocado; yendo los dos cuerpos en un mismo sentido, es la cantidad de movimiento igual à $MV + mu$; sea C la velocidad comun de estos cuerpos al tiempo de igualarse; por el principio de las fuerzas vivas resulta esta equacion, $MV + mu = C\ (M + m)$; lo que dá $C = \frac{MV + mu}{M + m}$

PROBLEMA II.

15. SE pide en segundo lugar qual será la velocidad de estos cuerpos al fin del choque.

Solucion. Siendo la fuerza de restitucion igual à la de compresion, deberá el cuerpo chocante perder igual cantidad de su velocidad desde el medio hasta el fin del choque, como ha perdido desde el principio hasta el medio de este choque; y el cuerpo chocado ganar igual cantidad de velocidad en ambos intervalos de tiempo; siendo pues V la velocidad del primero antes del choque, y C esta velocidad quando se han igualado ambas velocidades; será à esta epoca, $V - C$ la velocidad perdida por el cuerpo M; luego $2V - 2C$ será la velocidad perdida por el mismo cuerpo M desde el principio hasta el fin del choque; y por consiguiente $V - (2V - 2C)$ ò $2C - V$ la que le quede despues del choque.

Del mismo modo se verá que $C - u$ es la velocidad ganada por el cuerpo chocado desde el principio hasta el medio del choque, y $2C - 2u$ la ganada por el mismo cuerpo desde el principio hasta el fin del choque; luego será despues del choque la velocidad del cuerpo m igual à $u + (2C - 2u) = 2C - u$.

Susti-

Sustituyendo pues por C su valor $\frac{MV + mu}{M + m}$, resulta la velocidad despues del choque para el cuerpo M, igual à $\frac{MV + 2mu - mV}{M + m}$

y para el cuerpo m, igual à $\frac{2MV + mu - Mu}{M + m}$

Si la direccion de los cuerpos antes del choque en lugar de ser una misma, hubiera sido contraria; con solo mudar los signos de los terminos que contienen la expresion u, en las dos formulas antecedentes, resultarian las velocidades despues del choque, yendo antes de este los cuerpos en sentido contrario.

PROPOSICION III.

16. QUE la velocidad respectiva de los dos cuerpos despues del choque, sea la misma que antes, se hace patente, si se atiende à que ambos cuerpos padecen igual mutacion en sus velocidades desde el medio del choque en que estas eran iguales, hasta su separacion, que desde el principio hasta el medio del choque; lo que por otra parte se vé restando la velocidad $\frac{MV + 2mu - mV}{M + m}$ del cuerpo M, de la velocidad $\frac{2MV + mu - Mu}{M + m}$ del cuerpo m, despues del choque, su diferencia $V - u$, siendo la misma que antes del choque.

PRO-

PROBLEMA III.

17. DADAS las masas, y velocidades de dos cuerpos esfericos, y perfectamente elasticos que se chocan obliquamente en direcciones tambien dadas, se piden las circunstancias del movimiento despues del choque.

Solucion. Sean como antes M y *m* las masas de los dos cuerpos, AM y *am* las direcciones, y velocidades dadas de los mismos, dispuestas de tal modo que la distancia M*m* sea igual à la suma de los dos semidiametros de los cuerpos dados; tirese M*m* y prolonguese de una y otra parte; sobre AM y *am*, como diagonales formense los paralelogramos rectangulos BC, *bc*; resultarán, la velocidad *am* descompuesta en otras dos *bm*, *cm*; y la velocidad AM tambien descompuesta en BM, CM; siendo ahora las velocidades BM, *bm* de los cuerpos M, *m*, paralelas entre sí, en nada se estorban para que sigan con ellas estos mismos cuerpos despues del choque; tomando pues ME igual y en la prolongacion de BM, y *me* igual y en la prolongacion de *bm*, serán ME y *me* los espacios corridos despues del choque por los cuerpos M y *m*, en virtud de la parte paralela BM, *bm* de sus velocidades absolutas AM, *am*; resta hallar lo que debe resultar de las partes CM, *cm* diametralmente opuestas de las mismas velocidades absolutas AM, *am*; para cuyo fin haciendo C*m* == V, *cm* == *u*, y sustituyendo por M, *m*; V, *u*, sus valores en las formulas del § 15, se hallarán los valores de las velocidades de los cuerpos M, *m* despues del choque en la direccion M*m* de la linea que unia sus centros en el primer instante de su contacto; suponiendo pues que estas velocidades son MF, *mf*, tirando estas lineas sobre la recta M*m* prolongada Fig. 2.

si es necesario, y del lado que indiquen los signos resultantes de las formulas, en fin concluyendo los paralelogramos FE, *fe*, y tirando las diagonales MD, *md*, serán estas diagonales las direcciones, y velocidades con que seguirán ambos cuerpos despues del choque.

18. Para aplicar este método à un exemplo, construyo una escala R, à arbitrio, y suponiendo que la masa del cuerpo M sea 9, la de $m = 8$; que la velocidad $CM = V = 25$; la $cm = -u = -16$; sustituidos estos valores en las formulas generales, hallo que la velocidad del cuerpo M despues del choque es $-13 \frac{10}{17}$, y la del cuerpo m, $27 \frac{7}{17}$; tiro pues $MF = 13 \frac{10}{17}$ en el sentido contrario à CM, y $mf = 27 \frac{7}{17}$. Sobre las rectas ME, MF, describo el paralelogramo FE cuya diagonal MD es el camino del cuerpo M despues del choque: describiendo del mismo modo el paralelogramo *fe*, su diagonal *md* es el camino del cuerpo *m*; de tal modo que à distancias iguales de tiempo antes y despues del choque, las rectas como A*a* y D*d*, que unen sus centros, son iguales entre sí, è igualmente inclinadas à la linea M*m* que unia sus centros quando los cuerpos estaban en contacto: siendo esta ultima propiedad una conseqüencia del principio que hemos establecido, que las velocidades respectivas antes y despues del choque son iguales entre sí.

19. *Definicion.* Sea B*b* el perfil de un plano elastico; AC la direccion de un cuerpo esferico, y elastico tambien; el punto C se llama *de incidencia*; si en este punto y sobre el plano B*b* se levanta la perpendicular CD, el angulo ACD se (Fig. 3.)

llama

llama *de incidencia*, y en qualquiera direccion *ca* que esté rechazado el cuerpo despues del choque con el plano, el angulo DC*a*, se llama *de reflexion*.

PROPOSICION IV.

20. AHORA digo que quando es perfecta la elasticidad en el cuerpo chocante, y el plano chocado, ò que uno de los dos es perfectamente duro, es el angulo de reflexion igual al de incidencia, y es aquel tanto mayor que éste, quanto mas imperfecta es la elasticidad de ambos cuerpos, ò de uno de ellos, quedando el otro, ò perfectamente duro, ò perfectamente elastico. Con efecto, si se descompone la velocidad AC del cuerpo A en dos, una BC paralela al plano, y la otra DC perpendicular al mismo; en virtud de la velocidad BC, andará el cuerpo despues del choque la linea C*b* = BC en el mismo tiempo que ha baxado de A à C; pero en virtud de la velocidad DC, por la inmovilidad del plano será el cuerpo A rechazado en la direccion contraria CD, y llegará en el mismo tiempo hasta D si la elasticidad es perfecta; si no, solo llegará à un punto tanto mas inferior á D quanto la elasticidad sea menos perfecta, y por consiguiente la diagonal *ca*, ò *cá* que describirá el cuerpo despues del choque se aproximará tanto mas à la direccion del plano BC*b*, quanto mas imperfecta sea la elasticidad, quedando el angulo, à CD = ACD, solo en el caso de ser la elasticidad perfecta.

Nota. Hemos dicho que el angulo de reflexion era igual al de incidencia quando el cuerpo, y el plano eran perfectamente elasticos, ò quando siendo el uno perfectamente elastico, el otro era perfectamente duro, lo que es evidente, porque el

recha-

rechazo tiene igualmente lugar, y se hace con la misma fuerza en ambos casos; y solo la fuerza de restitucion es menor que la de compresion quando en uno de los dos cuerpos, ò en ambos la elasticidad es imperfecta.

PROBLEMA IV.

21. SEA ahora MNRS una mesa de Villar, y en ella las dos bolas de marfil A y B; se pregunta en primer lugar, qué direccion se debe dar à la bola A, para que despues de haver tomado dos tablas venga à chocar à la bola B en la direccion de su centro.

Fig. 4.

Solucion. Haviendo tirado en la parte interior de la mesa las paralelas *ab*, *bc*, *cd*, *de*, à las bandas MN, NR, RS, SM, à la distancia de estas del semidiametro de la bola A; del centro *h*, de la bola B, tiro à *cd* la perpendicular *hp*, que corta à *cd* en *r*, tomo *rp* == *rh*, por *p* tiro à *cd* la paralela *pq*, cortada en *s* por la prolongacion de *ad*, tomo *sq* == *ps*, en fin tiro A*q*; digo que A*q* es la direccion que se debe dar à la bola A para el fin propuesto.

Con efecto suponiendo que las bandas, y las bolas son perfectamente elasticas, en cuyo caso es el angulo de reflexion igual al de incidencia; por haber tomado *rp* == *rh*, es el triangulo *hfp* isoceles, y el angulo *rfp*, igual al angulo *rfh*; pero *rfp*, es opuesto al vertice al angulo *efd*; luego *efd* == *hfr*: del mismo modo se verá que en el triangulo isoceles *qep*, los angulos *pcs*, ò *fed*, y *qes* son iguales; pero *qes* es opuesto al vertice à A*ea*, luego los angulos A*ea*, *fed*, son iguales; de donde resulta que la bola A dirigida en A*e*, reflectirá en *ef*, y de alli en *fh*, que era lo que se buscaba.

PRO-

PROBLEMA V.

22. SE pregunta en segundo lugar, qué direccion se debe dar à la bola A para que despues de haver tomado dos tablas, su choque en la bola B dé à esta una direccion determinada *h c*.

Solucion. Supuesto que el choque haya de hacerse en un punto de la superficie de la bola B que está en la prolongacion de *c h*, prolongo *c h* hasta *h'* siendo *h h'* igual à la suma de los semidiametros de ambas bolas; despues procedo à una construccion semejante à la anterior, empezando desde el punto *h'*, como antes havia empezado desde *h*; cuya demostracion es la misma que en la proposicion anterior.

Observacion. En estas dos proposiciones hemos supuesto la elasticidad perfecta, pero no sucede así en la execucion, para cuyo acierto lo principal es una mano exercitada, y un conocimiento practico de la mesa; sin embargo quando esta es buena los efectos no dexan de corresponder con bastante exâctitud con la teoria.

APLICACION DEL METODO DE LOS MOMENTOS à la indagacion de las resultantes de varias potencias, que obrando en distintos puntos de un sistema de cuerpos obran tambien en distintos planos.

PROBLEMA VI.

23. EN el compendio de D. Benito Bails, se vé el modo de hallar por el método de los momentos la resultante de varias fuerzas, que no pasando por un mismo punto obran en un

mismo

plano; no será inutil apuntar aqui el modo de resolver la misma qüestion quando obran las potencias en distintos planos. Para esto se imaginan tres planos perpendiculares unos à otros; se descomponen las fuerzas cada una en tres perpendiculares à cada uno de estos tres planos, formando así de todas las potencias tres sistemas que obran cada uno perpendicularmente à uno de los trés planos: con esta disposicion, se puede considerar cada sistema de fuerzas como un sistema de masas, cuyo centro se hállará por el método de los momentos, refiriendo estas masas separadamente à cada uno de los tres planos perpendiculares entre sí, y cuya resultante teniendo su origen en este centro, será igual à la suma de las potencias que obran en un sentido, menos la suma de las que obran en el sentido contrário: executado esto para cada uno de los tres sistemas de fuerzas, se conseguirán tres distintas resultantes, que serán el menor número à que puedan reducirse varias fuerzas que obrando en diferentes sentidos estén colocadas en distintos planos; à menos que por casualidad dos de estas resultantes, y tal vez las tres se corten en un mismo punto, en cuyo caso las tres resultantes pueden reducirse à dos ò à una; pero estos casos son rarisimos.

DEL ROZAMIENTO.

24. PARA medir la resistencia del rozamiento, usan los mecanicos un plano inclinado AB, en el qual puesto un paralelepipedo Q de la materia, cuyo rozamiento se quiere averigüar, è inclinando despues à este plano levantandolo poco à poco hácia la vertical, se vé el punto en que el cuerpo Q está si se resvala ò no se resvala; en esta situacion se mide el angulo que forma

Fig. 5.

ma el plano con el horizonte; à este angulo le llamaremos *angulo del rozamiento*: representando ahora por GM el peso del cuerpo Q, si descompongo à este peso en dos GN y NM, el primero perpendicular, y el segundo paralelo à la inclinacion AB del plano, es evidente que la parte GN del peso del cuerpo está enteramente destruida por la resistencia del plano, no quedando del peso del cuerpo mas que la parte NM para hacerlo baxar en la direccion del plano; y sería esta MN la fuerza aceleratriz que le animaría, à no ser por las escabrosidades del cuerpo y el plano, las quales se oponen à su movimiento.

Don Jorge Juan en su Exâmen maritimo ha tratado este punto con mucha prolixidad, haciendo entrar en consideracion la amplitud de la impresion que forma el cuerpo Q por la presion que exerce sobre el plano, representada aqui por GN, la profundidad del obstaculo que en virtud de esta impresion se forma en la parte anterior del cuerpo, y el número y magnitud de las escabrosidades. No se puede negar que sean estos los elementos que producen la resistencia del rozamiento; pero à mas de que estos elementos son inaveriguables en la práctica, de qualquier modo que obren, siempre será cierto que estando el cuerpo si se resvala ò no se resvala, la fuerza de presion representada por GN, es la unica que produce la resistencia del rozamiento, y la unica fuerza que haga equilibrio con esta resistencia es la parte MN del peso; luego será siempre la presion à la resistencia del rozamiento como GN à NM; como AC à BC, pues que los triangulos GMN, ABC son semejantes; pero AC: BC:: el radio, es à la tangente del angulo del rozamiento BAC: y debiendo ser este angulo mayor ò menor segun sea el terso de los cuerpos

que

que rozan, y segun el modo con que estén aplicadas una à otra sus superficies, respecto à la direccion de su movimiento, ò de las potencias que le animan: si se hace en general la relacion de la presion à la resistencia del rozamiento, como 1, es à n, será $n = \frac{BC}{AC}$, siendo BC la altura, y AC la base del plano inclinado dispuesto de tal modo, que el cuerpo Q puesto sobre èl, y solicitado por la accion de la pesantez, este à punto de resvalarse; tendremos pues el peso, es à la presion, es à la resistencia del rozamiento, como $\sqrt{nn+1}$, es à 1, es à n, en que solo hai q̃ determinar el valor de n. Si pues en los experimentos q̃ se hagan con el plano inclinado para esta valuacion de n en una maquina que se tenga que calcular, se usan los mismos materiales, con igual lizo, è igualmente dispuestos que en esta maquina, se puede contar desde luego que, excusando el exâmen siempre dudoso de elementos, por sí, casi siempre inaveriguables, y por tanto mas expuestos à equivocacion, se conseguirá un valor de n suficientemente exâcto en la practica.

PROBLEMA VII.

25. SEA ahora el cuerpo Q colocado sobre un plano cuya elevacion es mayor que la que corresponde à la resistencia del rozamiento, y en el centro de gravedad G aplicada una potencia P cuya direccion forma con la del plano AB el angulo GoA; se pide la relacion de P à Q en el caso del equilibrio atendiendo à la resistencia del rozamiento.

Soluc. Tiro la vertical GM para representar el peso del cuerpo, la perpendicular al plano GtN, y de ambos

ambos lados de esta perpendicular, tiro por el punto G las rectas GN, Gm, que forman con la perpendicular de uno y otro lado de esta un angulo igual al que hemos llamado del rozamiento; por el punto M tiro à la direccion GP de la potencia la paralela MnNN, que termina en n, N, N, à las tres rectas Gn, GN, GN, por estos tres puntos, tiro à GM, las paralelas nr, NR, NR; es evidente que GR será el valor de la potencia P que haga equilibrio con el peso GM del cuerpo Q sin atender á la resistencia del rozamiento; GR el valor de P quando está el cuerpo à punto de subir en el plano, vencida ya la resistencia del rozamiento; y Gr el valor de P, quando está el cuerpo à punto de baxar, vencida tambien la resistencia del rozamiento.

Tomando pues el caso en que está el cuerpo à punto de subir, resulta esta proporcion P:: Q:: GR: GM:: sen. NGM: sen. NGR:: sen. (NGM + NGN): sen. (NGR — NGN):: sen. (NGM + NGN): sen. (90 gr. — Got — NGN):: sen. (NGM + NGN): cos. (Got + NGN) pues el angulo NGR es complemento del angulo Got, y el angulo NGM igual al angulo A del plano con el horizonte: asi llamando F el angulo del rozamiento, y H el que forma la direccion de la potencia con la del plano; será P: Q:: sen. (A + F): sen. (F + H)

26. Si se prescinde de la resistencia del rozamiento, serà P: Q:: sen. A: cos. H; y si atendiendo à esta resistencia se quiere que esté el cuerpo à punto de baxar, será P: Q:: sen. (A — F): cos. (H — F).

27. Si la potencia P es paralela al horizonte, la primera proporcion se reduce à esta P: Q:: sen. (A + E): cos. (A + F).

 Si

28. Si la potencia P es paralela al plano AB; es P : Q :: sen. (A + F) : cos. F.

Pues en el primer caso H = A, y en el segundo H = o.

DEL EQUILIBRIO EN EL TORNO *atendiendo à la resistencia del rozamiento.*

Fig. 6. 29. EL Torno cuyo perfil se vé en la figura, es una maquina compuesta de una rueda B, à cuya circunferencia está aplicada una potencia $Q + x$; de un Tambor A, de cuya circunferencia pende un peso P. y de un Exe, *a*, que descansa en la concavidad M*a*N de un apoyo wz.

PROBLEMA VIII.

30. SE pide el valor de la potencia $Q + x$ que obrando en el torno paralelamente al peso P haga equilibrio con este, y con la resistencia del rozamiento.

Solucion. Haciendo al radio del exe $Ca = a$, al radio del tambor $CA = b$, y al radio de la rueda $CB = c$: es evidente en primer lugar, que si la parte Q de la potencia $Q + x$, es la que hace equilibrio con el peso P, sin atender à la resistencia del rozamiento; será $P : Q :: c : b$, en cuyo caso, si son verticales las direcciones de la potencia y del peso, ocupa el exe la parte inferior del cubillo en que descansa, y la vertical resultante de las fuerzas P y Q, que pasa por el punto de contacto del exe en el cubillo, es perpendicular à la tangente en este punto, y por consiguiente pasa tambien por el centro C de toda la maquina.

Si ahora para vencer la resistencia del rozamiento, se añade à la potencia Q, otra x, que

sobre

obre en la misma direccion, es evidente que con este aumento, debe romperse el equilibrio que havia entre P y Q, y empezar à girar la maquina dentro de su cubillo, sirviendole sus asperezas de apoyo para hacerle subir dentro del mismo cubillo, hasta que la vertical que pasa por el nuevo punto de contacto a, corte al exe AB en un punto X tal que se tenga esta proporcion P : Q + x : : BX : AX : : BC − CX : AC + CX : asi para conocer el valor de la potencia x que debe añadirse à Q para vencer la resistencia del rozamiento, es necesario conocer el valor de CX.

Para esto repararemos que al paso que vá aumentandose la potencia Q, gira el exe dentro de su cubillo, acortandose el brazo de palanca BC, y alargandose el otro AC, en tal conformidad que estos brazos de palanca, el uno acortado, y el otro alargado, están siempre en razon inversa de sus potencias correspondientes; lo que despues de verificado el pequeño movimiento correspondiente al aumento de la potencia Q, mantiene el equilibrio entre estas nuevas potencias, y debe durar este equilibrio, interin el aumento de la potencia Q no llega à ser tal que la vertical que pasa por el punto de contacto del exe con su cubillo, forme con la tangente en este punto un angulo capáz de hacer resvalar el exe dentro de su cubillo, à modo de un cuerpo puesto sobre un plano inclinado, el qual ni se resvala, ni se mueve, interin el plano no llegue à formar con el horizonte el angulo que hemos llamado del rozamiento.

Llegado pues el exe de la maquina al punto de su cubillo, cuya tangente forme con el horizonte el angulo del rozamiento, y suponiendo que x es el aumento que se necesita dar à la potencia Q para producir este efecto, es evidente que por

poco

poco que se aumente la potencia x, empezará à girar la maquina, y seguirá girando en el mismo punto a del cubillo, interin la relacion de la presion à la resistencia del rozamiento quede la misma; sirviendole à toda la maquina este exceso de potencia sobre $Q + x$ de fuerza aceleratriz que produce en la maquina a cada instante nuevos grados de velocidad.

Siendo ahora el angulo g del triangulo gfh, cuya hipotenusa es tangente à la curbatura del cubillo en el punto de contacto, y la base horizontal, igual al angulo del rozamiento; resulta como hemos visto en la proposicion anterior, $gh : fh : gf :: 1 : n : \sqrt{n^2 + 1}$; y siendo semejantes los triangulos fgh, CaX; es $Ca : CX :: \sqrt{n^2 + 1} : n$; de donde $CX = \frac{an}{\sqrt{n^2 + 1}}$: bolviendo pues à tomar la proporcion $P : Q + x :: BC - CX : AC + CX$; y sustituyendo valores analiticos, resulta $P : P \times \frac{b}{c} + x :: c - \frac{an}{\sqrt{n^2 + 1}} : b + \frac{an}{\sqrt{n^2 + 1}} :: c\sqrt{n^2 + 1} - an : b\sqrt{n^2 + 1} + an$; que dá $x = P \times \frac{b + c}{c} \times \frac{an}{c\sqrt{n^2 + 1} - an}$; y $Q + x = P \times \left(\frac{b\sqrt{nn + 1} + an}{c\sqrt{nn + 1} - an} \right)$; y si como en la garrucha

rucha fixa $b = c$, es $x = P \frac{2an}{b\sqrt{nn+1} - an}$;

y $Q + x = P \times \frac{b\sqrt{nn+1} + an}{b\sqrt{nn+1} - an}$; en que $Q = P$.

31. En la Mecanica de Don Benito Bails, se halla que el valor de x en el torno es $P \times \frac{b+c}{c} \times \frac{an}{c - an}$; y en la garrucha $= P \cdot \frac{2an}{b - an}$, omitiendose en ambos casos el radical $\sqrt{nn+1}$: su raciocinio es el siguiente. Siendo $P + Q + x$ el peso total que obra sobre la maquina, y por consiguiente la presion que resulta dentro del cubillo; multiplicando à esta presion por n, relacion de la presion à la resistencia del rozamiento, será $(P + Q + x) \times n$, la resistencia que obrará en la circunferencia del exe, cuyo momento respecto al centro C de la maquina, será $an\ (P + Q + x)$; por otra parte x es la potencia que obrando al extremo del radio CB hace equilibrio con la resistencia del rozamiento, y cuyo momento cx para equilibrarse con esta resistencia, debe por consiguiente ser igual al momento $an\ (P + Q + x)$; de cuya equacion se saca $x = (P + Q) \frac{an}{c - an} = P \times \frac{b+c}{c} \times \frac{an}{c - an}$.

Pero es falso que la suma de pesos $P + Q + x$ sea la presion que padece el cubillo en el punto de contacto, en que se verifica la resistencia del rozamiento; pues por razon del aumento x que rompe el equilibrio entre las potencias P y Q, no pudiendo la tangente en el punto de contacto sino

incli-

inclinarse al horizonte, y por consiguiente ser oblicua à la direccion de las potencias que suponemos aqui verticales, y sabiendose que la presion de un cuerpo que descansa sobre un plano inclinado no es el peso absoluto de este cuerpo, sino este mismo peso multiplicado por la base del plano inclinado en que descansa, y partido por la longitud del mismo plano, cuya relacion en el caso del rozamiento es la de 1 à $\sqrt{nn+1}$: es evidente que siendo $P+Q+x$, el peso absoluto que obra dentro del cubillo, será la presion en el punto de contacto $= \frac{P+Q+x}{\sqrt{nn+1}}$; la resistencia del rozamiento $= \frac{(P+Q+x)n}{\sqrt{nn+1}}$; y su momento respecto al centro de la maquina $= \frac{(P+Q+x)an}{\sqrt{nn+1}}$ $= cx$, de cuya equacion se sacará el mismo valor de x que antes hemos indicado, y es una nueva prueva de lo fundado de nuestro razonamiento.

32. Si se quiere hacer entrar en consideracion el peso de la parte de la maquina que descansa en el cubillo, llamando M à este peso, segun los principios establecidos, tendremos esta equacion $\frac{(M+P+Q+x)\,an}{\sqrt{nn+1}} = cx$, de donde resulta

$$x = \frac{an}{c} \times \frac{Mc + P(b+c)}{c\sqrt{nn+1} - an}$$

PRO-

PROPOSICION V.

33. EN quanto al valor de la fuerza aceleratriz que resulta en el torno del aumento que para poner la maquina en movimiento continuo, y uniformemente acelerado, se ha dado à la potencia $Q + x$; llamando g el peso añadido, $\overset{I}{p}$ la fuerza aceleratriz producida por g; p la fuerza aceleratriz ordinaria, ò la accion de la pesantez, y S la suma de productos de todas las partes de la maquina valuadas en peso multiplicadas por el quadrado de su distancia al centro de rotacion, será $\overset{I}{p} = p \times \frac{g \times cc}{P\,bb + S + (Q + x + g)\,cc}$; cuya demostracion se verá en la teoria de los pendulos.

Don Jorge Juan en su exâmen maritimo ha tratado la misma question con mas generalidad, suponiendo que las potencias forman entre sí un angulo qualquiera ≚: en esta proposicion hace entrar segun su sistema, la amplitud de la impresion y la del obstaculo y escabrosidades, y llamando H y h à estas amplitudes, pretende que si P es la presion, $P \times \frac{h}{H}$ es la resistencia del rozamiento: indicando para determinar el valor de $\frac{h}{H}$ los mismos experimentos que los demás Autores para determinar el valor de n, que suponen representar la relacion de la presion à la resistencia del rozamiento: confieso ingenuamente que no alcanzo à ver la diferencia que puede haver entre $\frac{h}{H}$ coeficiente de P segun D. Jorge Juan, y n coeficiente de la misma P segun los demás Autores, ambos

con

con el fin de determinar la relacion de la presion à la resistencia del rozamiento, y si hai alguna; por las razones referidas quando hablamos del rozamiento en general, creería mas bien que está à favor del coeficiente n: pero dexando este punto que es de poco momento, hai otro mas esencial, y es que en su modo de tratar esta question, ha cometido Don Jorge Juan dos errores; el primero es que ha tomado la resultante de las fuerzas P y $Q + x$, por la expresion de la presion en el cubillo, diciendo expresamente: *Esta potencia fuerza al exe, haciendole apoyar en el punto G de su direccion* LcG *del mismo modo que si apoyara sobre un plano tangente al exe en el punto* G, *y a quien es perpendicular la direccion* LcG *de la potencia resultante*; pero es absolutamente imposible que esto sea asi, porque tanto en este caso como en todos los demas en que hai que vencer la resistencia del rozamiento en maquinas que giren al rededor de un centro, la resultante apoya en el cubillo sobre un plano inclinado, por donde resulta que la presion no es sino esta misma resultante partida por $\sqrt{nn+1}$. El segundo error está en la valuacion de esta misma resultante de las fuerzas de P y $Q + x$; pues suponiendo como lo hace que esta resultante pasa por el centro de la Maquina, y no siendo sino solo la de P y Q la que pasa por este centro, la verdadera de P y $Q + x$, arrimandose por precision hácia donde está el aumento x, es evidente que no puede tener ya esta resultante el valor que le dá nuestro autor.

PROBLEMA IX.

Fig. 7. HALLAR las circunstancias del equilibrio en el Torno quando las potencias forman entre

entre sí un angulo qualquiera $\leqq$, y atendiendo à la resistencia del rozamiento.

Solucion. Sean PL, QL las direcciones de las potencias P y $Q + x$; L su punto de concurso; a el punto de contacto del exe dentro de su cubillo; del centro C tirando al punto de contacto a el radio Ca; y las perpendiculares CA, CB à las direcciones de las potencias, tirando ademas CL, aL, y formando en el punto de contacto el triangulo fgh, en que gh es perpendicular à la direccion aL de la resultante de las fuerzas P y $Q + x$, y fg tangente en el punto de contacto; siendo el angulo en g el del rozamiento: haciendo en fin, como antes, $Ca = a$, $CA = b$, $CB = c$, el angulo $ALB = \leqq$, y n la relacion de la presion à la resistencia del rozamiento.

Supuesto que pasa por el centro C y por el punto de concurso L la resultante de las fuerzas P y Q; como tambien por el mismo punto de concurso L, y por el punto de apoyo a del exe dentro de su cubillo la resultante de las fuerzas P y $Q + x$, llamando u al angulo BLC, será $CLA = \leqq - u$; haciendo igual a R la resultante de las fuerzas P y Q, y sabiendose que tres fuerzas que se equilibran entre sí son cada una como los senos de los angulos formados por las otras dos, será $R : P :: \text{sen.} \leqq : \text{sen.}\, u$; de donde $R = P \times \frac{\text{sen.} \leqq}{\text{sen.}\, u}$: por el mismo principio se verá que $P : Q :: \text{sen.}\, u : \text{sen.}(\leqq - u) :: \text{sen.}\, u : \text{sen.} \leqq . \cos.\, u - \cos. \leqq . \text{sen.}\, u :: \text{sen.}\, u : \text{sen.} \leqq . \sqrt{1 - \widehat{\text{sen.}}^2\, u} - \cos. \leqq . \text{sen.}\, u$; de donde esta equacion $P.\ \text{sen.} \leqq . \sqrt{1 - \widehat{\text{sen.}}^2\, u} = P \cdot \cos. \leqq . \text{sen.}\, u + Q \cdot \text{sen.}\, u$; elevando al quadrado, transponien-

poniendo y reduciendo; $P^2 . \overline{\text{sen.}}^2 z = (P^2 + Q^2 + 2PQ. \cos. z)\, \overline{\text{sen.}}^2 u$; lo que dá P. $\frac{\text{sen. } z}{\text{sen. } u}$, ò $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos. z}$: ò por ser $Q = P. \frac{b}{c}$, será $R = P. \frac{1}{c} \sqrt{bb + cc + 2bc. \cos. z}$: esta es la resultante de las fuerzas P y Q; pero aunque en ella se substituya $Q + x$ por Q, no por esto será como lo pretende Don Jorge Juan la de P y $Q + x$.

Para hallar esta ultima resultante, hagamos igual à f el angulo del rozamiento, cuyo seno segun las denominaciones admitidas es. $\frac{n}{\sqrt{nn + 1}}$; tendremos en primer lugar $P : Q : R :: \text{sen. } u : \text{sen. } (z - u) : \text{sen. } z$; lo que dá $\text{sen. } u = \text{sen. } z \times \frac{P}{R}$, y $\text{sen. } (z - u) = \text{sen. } z . \frac{Q}{R} = \text{sen. } z \times \frac{bP}{cR}$; despues en el triangulo rectangulo CBL, es CB (c) : CL :: sen. CLB $(\text{sen. } z . \frac{P}{R}) : 1$; lo que dá $CL = \frac{cR}{P. \text{sen. } z} = \frac{bR}{Q. \text{sen. } z} = \ldots\ldots\ldots \frac{\sqrt{bb + cc + 2bc. \cos. z}}{\text{sen. } z}$; en fin en el triangulo CLa en que el angulo a es igual al angulo f del rozamiento, es CL : Ca (a) :: sen. f $\left(\frac{n}{\sqrt{nn + 1}}\right)$: sen. $CLa = \frac{an}{CL \sqrt{nn + 1}}$; de donde cos. $CLa = \sqrt{\frac{CL^2 (n^2 + 1) - a^2 n^2}{CL \sqrt{nn + 1}}}$: por otra parte sen.CLA

. . . . $= \frac{b}{CL}$, cos. CLA $= \frac{\sqrt{\overline{CL}^2 - b^2}}{CL}$; sen. CLB $=$ $\frac{c}{CL}$, cos. CLB $= \frac{\sqrt{\overline{CL}^2 - c^2}}{CL}$; de donde resulta, sen. aLB $=$ sen. (CLB $-$ CLa) $=$ sen. CLB $\times$ cos. CLa $-$ cos. CLB $\times$ sen. CLa $=$

$$\frac{c\sqrt{\overline{CL}^2 (n^2 + 1) - a^2 n^2} - an\sqrt{\overline{CL}^2 - c^2}}{\overline{CL}^2 \sqrt{nn + 1}};$$

sen. aLA $=$ sen. (CLA $+$ CLa) $=$ sen. CLA $\times$ cos. CLa $+$ cos. CLA $\times$ sen. CLa $=$ . . . . .

$$\frac{b\sqrt{\overline{CL}^2 (n^2 + 1) - a^2 n^2} + an\sqrt{\overline{CL}^2 + b^2}}{\overline{CL}^2 \sqrt{nn + 1}}.$$

Conocidos así los valores de los senos de los ángulos aLB, aLA, se hallará con facilidad en primer lugar la resultante de las fuerzas P y Q $+ x$, y en segundo lugar el valor de la fuerza x necesaria para equilibrarse con la resistencia del rozamiento.

Con efecto, haciendo à esta resultante igual à R', por la propiedad del paralelogramo de fuerzas, tenemos sen. aLB: sen. ALB:: P: R' $=$ P $\times$

$$\frac{\text{Sen. } \Xi}{\text{Sen. } a\text{LB}} = \frac{\text{P. sen. } \Xi \times \overline{CL}^2 \sqrt{n^2 + 1}}{c\sqrt{\overline{CL}^2 (n^2 + 1) - a^2 n^2} - an\sqrt{\overline{CL}^2 - c}};$$

ò por ser $\overline{CL}^2 = \frac{b^2 + c^2 + 2bc \cos. \Xi}{\text{sen.}^2\, \Xi}$; sustituyendo

yendo resulta, $\acute{R} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\frac{P\sqrt{nn+1}\,(bb+2bc.\cos.\Xi+cc)}{c\sqrt{(b^2+2bc.\cos.\Xi+c^2)(n^2+1)-a^2n^2.\text{sen.}^2\Xi}-an(b+c.\cos.\Xi)}$$

despues, sen. aLB: sen. aLA:: P: $Q+x = P \times$

$$\frac{b\sqrt{\overline{CL}^2(n^2+1)-a^2n^2}+an\sqrt{\overline{CL}^2-b^2}}{c\sqrt{\overline{CL}^2(n^2+1)-a^2n^2}-an\sqrt{\overline{CL}^2-c^2}};\ \text{ó}$$

sustituyendo por $\overline{CL}^2$ su valor $\dfrac{bb+cc+2bc.\cos.\Xi}{\text{sen.}^2\Xi}$

será $Q+x = P \times \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\frac{b\sqrt{(b^2+c^2+2bc.\cos.\Xi)(n^2+1)-a^2n^2.\text{sen.}^2\Xi}+an(b\cos.\Xi+c)}{c\sqrt{(b^2+c^2+2bc.\cos.\Xi)(n^2+1)-a^2n^2.\text{sen.}^2\Xi}-an(b+c.\cos.\Xi)}$$

de donde $x = P.\dfrac{an}{c} \times \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\frac{bb+cc+2bc.\cos.\Xi}{c\sqrt{(b^2+c^2+2bc.\cos.\Xi)(n^2+1)-a^2n^2.\text{sen.}^2\Xi}-an(b+c.\cos.\Xi)}$$

$$= \acute{R} \times \frac{an}{c\sqrt{nn+1}}.$$

Quando las potencias son paralelas entre sí, es el angulo $\Xi = o$, su seno $= o$, y su coseno $= 1$, lo qual sustituido en los valores de x, $Q+x$, y $\acute{R}$, reduce esos valores à ser los mismos, que hemos hallado quando tratamos este caso directamente.

Estos

Estos valores de la fuerza x necesaria para equilibrarse con la resistencia del rozamiento, de la fuerza $Q + x$, que se equilibra con P y la resistencia del rozamiento, y de la resultante R de P y $Q + x$, mui distintos de los que se hallan en Don Jorge Juan, son indubitablemente los verdaderos: pues obre como se quisiere la resistencia del rozamiento, llamese n ò $\frac{h}{H}$ la relacion de esta resistencia con la presion; siempre será cierto que la resultante de las fuerzas que se equilibran entre sí y con la referida resistencia del rozamiento, pasará por el punto de concurso de estas fuerzas, y por el de contacto del exe dentro de su cubillo: que serán estas fuerzas en razon inversa de los senos de los angulos que forman con su resultante: que por consiguiente nunca podrá pasar esta resultante por el centro de la maquina, ni ser perpendicular à la tangente en el punto de contacto, sino es en el unico caso de no atender à la resistencia del rozamiento; pues siendo dado el angulo que hayan de formar entre sí las potencias, si para vencer esta resistencia han de variar las potencias de su primitivo estado de equilibrio, claro está que ha de variar tambien el angulo que formen con su resultante; y ademas si permaneciera la resultante pasando por el centro de la maquina, y por consiguiente siendo perpendicular à la tangente en el punto de contacto, lejos de ponerse la maquina à punto de moverse, como solo puede andar en virtud de la resultante de las fuerzas que obran sobre ella, el permanecer así esta resultante perpendicular à la direccion del plano en que descansa, no haría mas que aumentar la estabilidad de la maquina al paso que se aumentaría el valor de esta resultante, quedando siempre la maquina en un perfecto equilibrio.

En

34. En la aplicacion de estas formulas à las Garruchas compuestas, se debe seguir el razonamiento que hai en el compendio de Don Benito Bails, con la unica diferencia de que à sus formulas se sustituirán las que acabamos de dar.

35. *Observacion*. En el mismo compendio, usa su autor de otro método que el que hemos indicado para medir la resistencia del rozamiento; supone un paralelepipedo puesto sobre un plano horizontal, tirado en una direccion horizontal por una cuerda que pasando por una garrucha sostiene un peso que cuelga de ella verticalmente, y pretende que el exceso de este peso sobre el del paralelepipedo, quando esta esté si se resvala ò no se resvala sobre el plano horizontal, es la resistencia del rozamiento al movimiento de este paralelepipedo; esto será cierto quando la soga que se emplee en este experimento esté ya tan desgastada que al doblarse al rededor de la garrucha no oponga sino mui poca ò ninguna resistencia, como tambien quando se pueda despreciar el rozamiento del exe de la garrucha dentro de su cubillo. El usar para este experimento de una cuerda mui gastada es cosa facil; pero pudiendo ser de alguna consideracion la resistencia del rozamiento del exe de la garrucha, la que con lo explicado hasta aqui, puede valuarse con separacion al resto de la resistencia total, y siendo ademas este el método mas exâcto para medir la resistencia del rozamiento, conviene explicar el modo de hacer esta separacion.

Para esto repararemos que las direcciones de las potencias que tiran de la garrucha forman entre sí un angulo recto, en cuyo caso es sen. $\frac{z}{r} = 1$, cos. $\frac{z}{r} = 0$; lo que en las formulas anteriores hace

$$R = P \times \frac{\sqrt{nn+1}}{\sqrt{2b^2(n+1)^2 - a^2n^2 - an}} \text{; y } x = P \times \frac{2abn}{\sqrt{2b^2(n+1)^2 - a^2n^2 - an}}$$

; en que P es el peso del paralelepipedo puesto sobre el plano horizontal, a el radio del exe de la garrucha, b el radio de esta garrucha, y n la relacion de la presion à la resistencia del rozamiento del exe de esta misma garrucha con su cubillo.

Si pues, supuesto à n un valor, el que se juzgue aproxîmarse mas à la verdad segun el liso y la calidad de los materiales que se empleen, se cuelga de la cuerda un peso Q tal que el peso P puesto sobre el plano horizontal esté à punto de resvalarse, es evidente que $Q - P - x$ es el rozamiento que experimenta el peso P; y por consiguiente que $\frac{Q-P-x}{P}$ es la relacion de la presion à la resistencia del rozamiento, ò el valor de n, que conviene à este caso: pero si el exe de la garrucha y su cubillo son de un mismo material, que el peso P, y el plano en que descansa; es evidente que este ultimo valor de n es el que se havia de sustituir por n en el de x, para conseguir el verdadero rozamiento de la garrucha, lo que executado dará à x, y por consiguiente à $\frac{Q-P-x}{P}$, ò à n otro valor; y bolviendo à hacer esta operacion tres ò quatro veces, resultará un valor de n, tal vez se puede decir que enteramente exâcto.

DEL MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE *acelerado ò retardado.*

36. SUPUESTO lo que acerca de esta especie de movimiento se halla demostrado en el citado compendio; sea p la fuerza aceleratriz constante que obra sobre un cuerpo, esto es la velocidad que adquiere este cuerpo cayendo libremente desde el reposo en el espacio de tiempo de un minuto segundo, cuyo valor es, con corta diferencia, de 32 pies ingleses, en la superficie de la tierra; sea e, el espacio corrido en virtud de esta fuerza aceleratriz, en el tiempo dado t; y u, la velocidad adquirida en virtud de esta misma fuerza en el tiempo t.

Por lo demostrado en la citada obra se sabe que se tienen las dos equaciones siguientes:

$$e = \tfrac{1}{2} u t; \qquad e = \tfrac{1}{2} p t^2;$$

lo que dá $\quad u = pt$

tomando el valor de t en la primera y tercera equacion, è igualando estos valores, resulta

$$u^2 = 2ep.$$

Despejando en fin cada letra de por sí en estas quatro equaciones, resultan las doce siguientes.

37. $$e = \tfrac{1}{2} ut \qquad u = \frac{2e}{t} \qquad t = \frac{2e}{u} \qquad p = \frac{2e}{tt}$$

$$e = \tfrac{1}{2} ptt \qquad u = pt \qquad t = \frac{u}{p} \qquad p = \frac{u}{t}$$

$$e = \frac{uu}{2p} \qquad u = \sqrt{2ep} \qquad t = \frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{p}} \qquad p = \frac{uu}{2e}$$

Con cuyo auxilio estará resuelto completamente el problema siguiente.

PRO-

PROBLEMA X.

38. De estas quatro cosas, la altura de donde cae libremente un cuerpo grave desde el reposo; la accion de la pesantez que le anima; el tiempo que emplea en su carrera; y la velocidad adquirida al fin de esta carrera; dos siendo dadas, hallar el valor de las otras dos.

Si pues en las mismas formulas se hace, como diximos, $p = 32$, y se valuan los demas datos en pies ingleses, resultará quanto experimentamos en la caída libre de los graves en la superficie de la tierra.

PROPOSICION VI.

39. Para aplicar estas formulas à la caída de los cuerpos en planos inclinados: sea ABC un plano inclinado en que descansa el cuerpo Q; AB = L, la longitud de este plano; AC = b, la base del mismo plano paralela al horizonte; y BC = a, su altura vertical; sea ademas el peso absoluto del cuerpo Q representado por la vertical GM; si se descompone esta fuerza en otras dos, GN, NM, la primera perpendicular, y la segunda paralela, à la longitud del plano; es evidente que la fuerza GN será enteramente destruida por la resistencia del plano, y que por no poder moverse el cuerpo sino es en la direccion del plano, la accion de la pesantez que antes era GM, se reducirá aqui à NM, lo que dá esta proporcion, la accion de la pesantez libre p, es à esta accion en el plano inclinado, $\overset{1}{p}$, como GM es à NM; pero GM : NM :: AB (L): BC (a) de donde resulta la pesantez en el plano inclinado $\overset{1}{p} = p \times \frac{a}{L}$ Fig. 8.

 este

este es el valor de p que se ha de sustituir en lugar de p en nuestras formulas, para hacerlas aplicables à la caída de los graves en planos inclinados.

40. Para hacer algunas aplicaciones de estas formulas, propongamonos resolver las qüestiones siguientes.

PROBLEMA XI.

I. DEterminar la relacion de los espacios corridos en un mismo tiempo contado desde el principio del movimiento, por cuerpos que caen libremente en las direcciones de varios planos inclinados.

PROBLEMA XII.

II. DEterminar la relacion de los tiempos empleados en correr las longitudes de varios planos inclinados de una misma altura.

PROBLEMA XIII.

III. DEterminar las velocidades adquiridas al fin del descenso por varios planos inclinados de una misma altura.

Para todas estas qüestiones, represento por, $é$, el espacio corrido en la direccion de los planos dados; r el tiempo empleado en correr este espacio, y $ú$ la velocidad adquirida al fin de este tiempo.

41. Despues para la primera qüestion, reparo que siendo lo que se pide el espacio que se ha de correr en un mismo tiempo por varios planos cuyas inclinaciones son dadas; los datos son la accion de la pesantez y el tiempo, y las incognitas los espacios: buscaré pues entre las doce formulas las

que

que solo contienen, e, p, t, y entre estas elegiré la que dé el valor de e, y es $e = \frac{1}{2}\, ptt$; en la que sustituyendo por p, p' ò su valor $p \times \frac{a}{L}$, resulta esta proporcion $e : e' :: \frac{1}{2}ptt : \frac{1}{2}p' t' t' :: p : p'$ (pues $t = t'$) :: $L : a$. Lo que significa que los espacios corridos en un mismo tiempo en las direcciones de varios planos inclinados de una misma altura, son al espacio corrido libremente en la vertical, en el mismo tiempo, como la altura comun à estos planos, es à sus longitudes.

42. Una conseqüencia de esta proposicion es, que si del punto inferior C de la altura BC del plano inclinado AB, se tira à su longitud la perpendicular CD; dos cuerpos que cayeran ambos del punto B el uno en la direccion del plano, y el otro verticalmente corrieran el primero el espacio BD, y el segundo el espacio BC en el mismo tiempo; pues segun la question anterior son estos espacios como BC à BA; pero BC : BA :: BD : BC. Luego, &c.

43. La segunda conseqüencia es que si sobre la vertical BC como diametro, se describe el semicirculo BDdC, todas las cuerdas que desde el punto B se tiren en este semicirculo, estarán corridas en un mismo tiempo: pues tirando desde el punto B qualquier plano inclinado Bda, y la cuerda Cd, siendo esta cuerda perpendicular à Ba, será Bd corrido en el mismo tiempo que BC.

44. Para la segunda question los datos son las longitudes de los planos, y como su altura es comun, tambien es dada la accion de la pesantez, y lo que se pide los tiempos, por donde veo que la formula que resuelve este caso es $t = \sqrt{\frac{2e}{p}}$; lo

que dá esta proporcion, $t : \acute{t} :: \sqrt{\frac{2e}{p}} : \sqrt{\frac{2\acute{e}}{\acute{p}}} :: \sqrt{a} : \sqrt{\frac{L}{\frac{a}{L}}} :: \sqrt{aa} : \sqrt{LL} :: a : L$ lo que significa que estos tiempos son como las longitudes de estos planos.

45. En la tercera question los datos son las longitudes de los planos, y la accion de la pesantez, y lo que se busca son las velocidades: la formula que corresponde à este caso es pues $u = \sqrt{2ep}$, y dá esta proporcion $u : \acute{u} :: \sqrt{2ep} : \sqrt{2\acute{e}\acute{p}} :: \sqrt{a} : \sqrt{L\frac{a}{L}} :: 1 : 1$ luego $u = \acute{u}$; esto es que las velocidades adquiridas al fin de varios planos inclinados de una misma altura son iguales entre sí, y à la que adquiriera un cuerpo cayendo libremente de la altura comun à todos estos planos.

DEL MOVIMIENTO VARIADO.

46. SUpuesto que las cantidades variables que penden del tiempo pueden suponerse constantes para un instante infinitamente pequeño; es evidente que la formula $e = ut$ del movimiento uniforme, hecha diferencial podrá pertenecer al movimiento variado, y dará $de = u\,dt$; con efecto si en el tiempo t, corre un cuerpo el espacio e con la velocidad u; es evidente que con la misma velocidad u, en el instante dt correrá el mismo cuerpo la parte infinitamente pequeña de del espacio e; habiendo igual número de elementos de en el espacio e, que de instantes dt en el tiem-

tiempo t, y como el espacio corrido en qualquier tiempo que sea, ya finito ò ya infinitamente pequeño es tambien proporcional à la velocidad, y que esta en todo movimiento uniforme es una misma interin la duracion del movimiento, se sigue que la formula del movimiento uniforme $e = ut$, que pertenece à un tiempo finito t, se muda para un instante infinitamente pequeño, y por consiguiente para el movimiento variado en $de = u\,dt$.

Por otra parte la formula $u = pt$ que pertenece al movimiento uniformemente acelerado, expresando que u es la velocidad que produce la accion de la pesantez en el tiempo t, es evidente que esta misma pesantez en el instante infinitamente pequeño dt producirá la diferencial de velocidad du; lo que dá esta segunda equacion $du = p\,dt$.

De la primera equacion se saca $u = \frac{de}{dt}$ que multiplicada por $du = p\,dt$, dá, $u\,du = p\,de$.

De la misma equacion primera diferenciada resulta $du = \frac{dde\,dt - de\,ddt}{dt^2} = \frac{dde}{dt}$ quando dt es constante esto es que se suponen iguales entre sí los elementos del tiempo.

Comparando las dos equaciones $du = p\,dt$; y $du = \frac{dde}{dt}$ resulta $dde = p\,dt^2$.

Si por otra parte se considera que la cantidad de movimiento ò fuerza de un cuerpo que represento por (f) es proporcional à la masa (m) de este cuerpo multiplicada por su velocidad (u); resulta $f = mu$, ò, $u = \frac{f}{m}$: siendo ademas la masa (m) de un cuerpo proporcional à su volumen (V) multiplicado por su densidad D, es

$m =$

$m = \frac{f}{DV}$; sustituyendo estos valores de u en las formulas antecedentes, y despejando cada letra de por sí, se conseguirá toda la teoria de los movimientos variados.

DE LOS MOVIMIENTOS EN LINEA CURVA.

PROPOSICION VII.

47. UN cuerpo animado de dos fuerzas à un tiempo ò de quantas fuerzas se quiera reducidas à dos, cuyas direcciones forman un angulo, describe una recta, si las dos fuerzas impelentes son de una misma naturaleza; pero si son de distinta, describirá el cuerpo una curva llamada *Trayectoria*, cuya naturaleza penderá de la relacion que tienen entre sí á cada instante los conatos de estas fuerzas.

La primera parte de esta proposicion es evidente; porque sean ò no uniformes las fuerzas impelentes, como sus mutaciones sean proporcionales entre sí, obrando siempre cada una de por sí en una misma direccion; una misma diagonal lo será de todas las partes correspondientes de estas dos fuerzas, como tambien del total de ellas: por consiguiente el cuerpo impelido por dos fuerzas de una misma naturaleza describe una recta, y esta es la diagonal de estas mismas fuerzas.

En quanto à la segunda parte, que el cuerpo impelido por dos fuerzas de distinta naturaleza debe describir una curva cuya naturaleza penderá de la de las dos fuerzas impelentes; por exemplo si de las dos fuerzas impelentes la una es uniforme, y obra en una direccion dada, y la otra aceleratriz

cons-

constante en una direccion tambien dada, digo que en virtud de estas dos fuerzas describirá el cuerpo una Parabola.

Para demostrarlo, sean, CD la direccion de Fig.
la fuerza uniforme, y CA la de la fuerza acelera 9.10
triz constante; tomando sobre CD, las tres partes infinitamente pequeñas è iguales CE, EF, FD, estas rectas (partes de CD) serán los espacios corridos en tiempos iguales por el cuerpo en virtud de la fuerza uniforme; luego los espacios CE, CF, CD, serán como los tiempos empleados en correrlos; pero los que debe correr el cuerpo en los mismos tiempos, segun CA en virtud de la fuerza aceleratriz constante, han de ser como el quadrado de los tiempos; si pues se toman, CG, CH, CA, como $\overline{CE}^2$, $\overline{CF}^2$, $\overline{CD}^2$, el cuerpo debe hallarse en G, H, A en virtud de la fuerza aceleratriz constante, en el mismo tiempo que en E, F, D, en virtud de la fuerza uniforme; y como estas fuerzas deben tener todo su efecto completo, se sigue que en virtud de ambas fuerzas, al fin de los tiempos proporcionales à CE, CF, CD, debe hallarse el cuerpo en los extremos T, K, B, de las diagonales de los paralelogramos CGIE, CHKF, CABD, y este efecto es cierto, no solo suponiendo, como lo acabamos de hacer, que las partes, CG, CH, CA, y sus correspondientes CE, CF, CD, son infinitamente pequeñas, sino tambien en el caso de suponerse estas lineas finitas, ò representando espacios correspondientes finitos corridos en virtud de las dos fuerzas supuestas; lo que no sería si ambas fuerzas ò una de ellas en el discurso de su accion mudaba su direccion, como sucede en *las fuerzas centrales.* Mirando pues en el caso actual CGHA como una linea de abcisas, GI, HK,

AB,

AB, iguales à CE, CF, CD, como las ordenadas de la curva CIKB descrita por el cuerpo, y siendo CI, CH, CA, como $\overline{GI}^2$, $\overline{HK}^2$, $\overline{AB}^2$, es evidente que la curva descrita es una parabola, y la recta CA el exe de ella, si la direccion de la fuerza uniforme forma un angulo recto con la de la fuerza aceleratriz, ò uno de sus diametros si este angulo es oblicuo.

48. *Fuerza central*, es aquella que impele ò atrae hácia cierto punto à un cuerpo que ha recibido una impresion primitiva y finita en una direccion qualquiera; y toma el nombre de *Centripeta* quando se considera inherente al cuerpo: asi se puede mirar el peso de una piedra (sea la que fuere su causa) como una fuerza centripeta que reside en ella, y la solicita continuamente à acercarse al centro de la tierra; y como el efecto de una impulsion primitiva impresa en una direccion dada es hacer describir continuamense una recta en esta misma direccion, el cuerpo animado por una fuerza de esta clase en una direccion distinta de la que le dirige al centro de la fuerza centripeta, conservará evidentemente una propension continua para apartarse de este centro: la parte de su fuerza absoluta que le aparta así del citado centro se llama *Fuerza centrifuga*, y es à cada instante igual y directamente opuesta à la centripeta, no siendo la una mas que la reaccion de la otra; por cuyo motivo se comprehenden ambas baxo el nombre comun de fuerza central, y por el de Trayectoria la curva descrita por el cuerpo animado de estas dos fuerzas.

DE LOS TIROS POR ELEVACION PRESCINdiendo de la resistencia del medio.

PROPOSICION VIII.

49. PUDIENDO la fuerza que anima los graves en la superficie de la tierra mirarse como una fuerza aceleratriz constante, es evidente que la parabola será la curva descrita por un cuerpo arrojado paralela ù obliquamente al horizonte.

50. Supuesto esto; sea CD la direccion de la fuerza de proyeccion; CA la de la pesantez; CIKB la parabola descrita; el punto C se llama punto de proyeccion, y si se supone que el punto L es el que se quiere alcanzar, la recta CL se llama *Alcance de la proyeccion*; el angulo ACN formado entre la direccion CA de la proyeccion y la recta CN paralela al horizonte se llama *Angulo de proyeccion*; la recta horizontal CN comprehendida entre el punto de partida C y el punto en que esta misma horizontal corta à la parabola descrita, se llama *Amplitud de la proyeccion*; en fin la altura CB à que ascendiera el cuerpo si fuera arrojado verticalmente se llama *Fuerza de proyeccion.* Fig. 9. 10 11.

PROPOSICION IX.

51. SI CA se eleva sobre el horizonte, ò si el angulo ACH es obtuso el cuerpo arrojado anda subiendo hasta llegar à un cierto punto S vertice de la parabola que describe, y despues baxa por el otro ramo de la misma parabola. 11.

Si CD es paralela al horizonte, ò si el angulo ACD es recto, el cuerpo parte del vertice de su parabola. 9.

Fig. 10. Y si CD se inclina debaxo del horizonte, ò si el angulo ACD es agudo, el cuerpo irá siempre baxando desde el punto de partida, describiendo así una porcion de parabola sin vertice: pero en todos casos será CH un diametro de la parabola descrita.

PROPOSICION X.

52. ADEMAS es evidente que la direccion de la fuerza uniforme, ò la recta en cuya direccion se arroja un cuerpo, es una tangente à la parabola en el punto de proyeccion; porque siendo la fuerza de proyeccion finita, y no obrando la accion de la pesantez sino por grados infinitamente pequeños, no puede esta en el principio del movimiento desviar el cuerpo de la direccion de la proyeccion sino de una cantidad infinitamente pequeña; y por tanto debe ser esta direccion de la proyeccion tangente à la curva descrita por el cuerpo.

PROPOSICION XI.

53. SE vé tambien que siendo el parametro
9. 10 P del diametro CH igual al quadrado de qualquiera ordenada à este diametro, partido por la abscisa correspondiente; se tiene $P = \frac{\overline{CD}^2}{DB}$; y reciprocamente siendo un cuerpo arrojado segun CD, si el parametro de la parabola que debe describir saliendo del punto C, es igual à $\frac{\overline{CD}^2}{DB}$, la parabola descrita pasará por el punto B.

PRO-

PROPOSICION XII.

54. DE qualquier modo que un cuerpo describa una parabola la fuerza que le impele uniformemente puede representarse por una vertical CB igual à la altura à que huviera ascendido si se le huviera arrojado verticalmente de abaxo arriba con la misma fuerza. Fig. 11.

Por grande que se imagine una fuerza finita, esta misma podrá siempre adquirir un cuerpo cayendo libremente proporcionandole la altura necesaria para ello ; luego la fuerza que impele à un cuerpo podrá siempre expresarse por la altura de donde huviera de caer este cuerpo para adquirir una velocidad igual à la que se le ha comunicado al principio del movimiento, ò lo que es lo mismo, por la altura à que huviera ascendido el cuerpo arrojado verticalmente impelido de abaxo arriba con la misma fuerza.

PROPOSICION XIII.

55. LA vertical CB que expresa à la fuerza de proyeccion es la quarta parte del parametro del diametro CI comun à todas las parabolas posibles pertenecientes à esta fuerza de proyeccion ; esto es à quantas parabolas pueda describir el cuerpo en virtud de esta fuerza.

Con efecto siendo CB la altura à que huviera ascendido el cuerpo en virtud de esta misma fuerza, ò de donde huviera baxado con un movimiento uniformemente acelerado desde el reposo hasta adquirir la velocidad que se supone le comunicó la fuerza en el primer instante del impulso dado, es evidente que siendo CA la direccion del movimiento, si se toma CA = 2CB, será CA el espacio corri-

corrido uniformemente por el cuerpo en el mismo tiempo que huviera ascendido desde C à B por un movimiento uniformemente retardado, ò (tomando $CH = CB$) en el mismo tiempo que huviera baxado desde C à H por un movimiento uniformemente acelerado: si pues el cuerpo en un cierto espacio de tiempo finito debe hallarse en A en virtud de la accion de la fuerza impelente, y en el mismo tiempo en H en virtud de la accion de la pesantez; es evidente que en este mismo tiempo se hallará el cuerpo en M al extremo de la diagonal del paralelogramo CAMH; luego la parabola descrita por el cuerpo, ha de pasar por precision por este punto M; luego HM es una ordenada à esta parabola; pero por la propiedad de la parabola es $\overline{HM}^2 = CH \times P$, siendo P el parametro del diametro CH; y por ser $HM = 2CH$, es $4\overline{CH}^2 = CH \times P$, lo que dá $P = 4CH = 4CB$, y es la proposicion que nos proponiamos demostrar.

Corolario primero.

Fig. 12. 56. Una conseqüencia de esta proposicion es que siendo el punto C comun à todas las parabolas posibles descritas con la fuerza de proyeccion representada por CB, y BT perpendicular à CB la directriz comun à todas estas parabolas, si del punto C como centro y con el radio CB se describe un circulo $f f' f'' f'''$, los puntos de la circunferencia de este circulo serán los focus de todas las parabolas posibles descritas en virtud de la fuerza de proyeccion representada por CB.

Colo-

Corolario segundo.

57. Tambien se vé que dista tanto mas este focus del vertice de su parabola, quanto mayor es la fuerza de proyeccion, y quanto mas se acerca à ser recto el angulo que forma con la vertical la direccion de esta proyeccion; porque siendo recto este angulo, se halla el focus en la parte inferior del circulo BFI, y es este circulo tanto mayor quanto mayor es la fuerza de proyeccion, y la situacion del vertice de la parabola está siempre en medio entre el focus y la directriz.

PROBLEMA XIV.

58. DADA la fuerza de proyeccion, y el termino del alcance del cuerpo arrojado, determinar las direcciones de esta proyeccion, esto es, los angulos de proyeccion.

Solucion. Sea L el termino del alcance dado en la recta CL; del punto de proyeccion C tirese CD paralela al horizonte, y levantese la perpendicular CP igual al parametro dado por la fuerza de proyeccion; por el medio F de esta CP, levantese la perpendicular GN, y por C sobre CL la perpendicular CG; del punto de interseccion G y con el radio CG describase un arco de circulo CNP; en fin por el punto L termino de la proyeccion tirese à CP la paralela LA; por los puntos A y *a* de interseccion de esta paralela con el arco CNP, tirense las rectas CA, C*a*; los angulos ACD, *a*CD serán los buscados.

59. Haviendo tirado PA y P*a*, los triangulos PAC, CAL, son semejantes, como tambien los triangulos PC*a*, *a*CL; pues son iguales los angulos PCA, CP*a*, CAL, *a*CL; como tambien los angulos CPA, PC*a*, ACL, C*a*L; lo que dá Fig. 13. 14

estas

estas proporciones $\div$ PC : CA : AL y $\div$ PC : C*a* : *a*L ; de donde $\overline{CA}^2 = PC \times AL$; y $\overline{Ca}^2 = PC \times aL$; pero PC es el parametro del diametro comun à todas las parabolas posibles descritas con la fuerza de proyeccion dada ; CA y C*a* , las direcciones de estas proyecciones, y por consiguiente tangentes a la curva en el origen de este diametro, y paralelas à las ordenadas à este mismo diametro; si pues CA y AL ò C*a* y *a*L son los dos lados contiguos de un paralelogramo ; para que las parabolas pasen por el punto L es necesario que el quadrado de la ordenada en L , $\overline{CA}^2$ sea igual al producto de la abscisa AL ò *a*L por el parametro CP , y es lo que se verifica ; luego la curva descrita por un cuerpo arrojado en las direcciones CA ò C*a* , con una fuerza representada por la quarta parte de CP , pasa efectivamente por el punto L dado.

Corolario.

60. Si la paralela LA no encontraba al arco CNP , el problema sería imposible , y el termino dado estaría fuera del alcance del tiro : si esta misma paralela llegaba à ser tangente al arco CNP, tendria el problema una solucion no mas ; y si en este ultimo caso el termino dado y el punto de salida estan en una misma recta horizontal , la direccion de la potencia forma con el horizonte un angulo de 45 grados , y llega la amplitud del alcance à tener el mayor valor posible.

PROPOSICION XIV.

61. ESTANDO en una misma linea horizontal el punto de partida C , y el de

de llegada L, la distancia CB ò CL es como el seno del doble de cada angulo de proyeccion ACB ò *a*CB; la razon es que trasladando CB paralelamente à sí misma, hasta A, se hace esta CB el seno del arco PA, ò de su suplemento CNA, cuya mitad mide al angulo ACB; y trasladada en *a*, es el seno del arco C*a*, cuya mitad mide al angulo *a*CB.

PROBLEMA XV.

62. DADO el angulo de proyeccion y la posicion del termino determinar la altura à que debe ascender el cuerpo, ò el vertice de la parabola que debe describir este cuerpo.

Sea ACB el angulo de proyeccion, haviendo tirado la horizontal CD, y del punto *b* medio entre C y F, la perpendicular *b o f*, à la recta CA, que corta en *o* à esta recta; tomado sobre esta perpendicular $of = ob$; *f* será el focus de la parabola descrita en virtud de la fuerza de proyeccion C*b*, dirigida en CA; HE su exe; CE una ordenada à este exe; CH la tangente à la curva en C, y por consiguiente el vertice de esta curva S en medio entre los puntos H y E.

Corolario primero.

63. Quando el punto de proyeccion y el termino del alcance está en una misma recta horizontal, la altura $SE = \frac{1}{4}$ AB; pues entonces el exe está en medio entre C y B, y por los triangulos semejantes ACB, CHE, la subtangente $HE = \frac{1}{2}$ AB, y $SE = \frac{1}{4}$ AB.

Corolario seguudo.

64. Quando el angulo de proyeccion es de 45 grados es la altura de la parabola la octava parte del parametro, pues $\frac{1}{4}$ MN $= \frac{1}{8}$ PC.

PRO-

PROPOSICION XV.

65. LAS alturas à que ascienden los cuerpos arrojados son como los seno-versos del doble de sus angulos de proyeccion; pues siendo estas alturas como las quartas partes de BA y B*a*, son tambien como estas mismas rectas enteras; pero estas trasladadas sobre el diametro CG, son los seno-versos de los arcos CA, C*a*, que miden el doble de cada angulo de proyeccion.

PROPOSICION XVI.

66. LOS tiempos que dos cuerpos arrojados con una misma fuerza emplean en llegar à un mismo punto dado por las dos direcciones CA, C*a*, son entre sí como los senos de los angulos de proyeccion ACL, *a*CL.

Con efecto el tiempo que emplea el cuerpo en llegar desde C hasta L en virtud de la impulsion en la direccion CA, la unica que puede hacerle salir de la vertical que pasa por C, es igual al que emplearia en ir uniformemente desde C à A; luego el tiempo que el cuerpo arrojado en la direccion CA emplea en llegar à L puede representarse por CA, y por C*a* si está arrojado en la direccion C*a*; luego son estos tiempos como CA : C*a*:: $\frac{1}{2}$CA : $\frac{1}{2}$C*a*; pero $\frac{1}{2}$CA y $\frac{1}{2}$C*a*, son los senos de los arcos $\frac{1}{2}$CNA, $\frac{1}{2}$C*a*, que miden los angulos de proyeccion: luego, &c.

67. *Observacion.* Esta teoria aunque al parecer completa, es mui distante de dar sus resultados conformes à la practica; muchos ostaculos se oponen à que esto así sea: en primer lugar, la resistencia del aire al movimiento de los cuerpos en razon de la superficie de estos y del quadrado de sus

velo-

velocidades disminuye considerablemente las dimensiones de la curva descrita por el cuerpo, y la hacen discrepar sensiblemente de una parabola, como lo veremos quando tratemos del movimiento de los solidos en un medio resistente: en segundo lugar, si el centro de gravedad del cuerpo arrojado no coincide con el de figura como en efecto es así en las bombas, y debe ser para que cayendo estas, esté siempre el cebo en la parte superior; y es mui comun experimentarse en las balas, por componerse estas de un hierro impuro, poco homogeneo, y estar mal redondeadas; se sigue que girando estas al rededor de su centro de gravedad, el de figura debe dar bueltas al rededor del primero; y como la resultante de todas las resistencias del aire pasa siempre por el centro de figura, quando la de la impulsion pasa constantemente por el de gravedad, es forzoso que la curva descrita por el cuerpo tome infinitas curvaturas que algunas veces le desvian sensiblemente de la direccion del tiro; y si à estos motivos se juntan los diferentes modos de atacar; la mayor ò menor humedad de la polvora; la diferencia entre el diametro del anima del cañon, y el de la bala; la varia disposicion de la Atmosfera que la hace mas ò menos densa; el viento contrario ò favorable à la direccion del tiro; la dificultad de medir la velocidad inicial de la bala al salir de la pieza de artilleria; con otras causas que no se pueden preveer; se verá que no solo deben discrepar considerablemente los efectos de lo que nos acaba de dar la teoria; sino tambien quan dificil es, aun con el calculo mas riguroso, acertar con lo real y practico en la teoria de los tiros por elevacion.

PROPOSICION XVII.

Fig. 15. 68. SI un cuerpo movido por qualesquiera fuerzas describe una curva ABCD, digo que en cada desvio que padezca por razon de la curvatura de la curva, solo perderá de la velocidad que haya adquirido, una cantidad infinitamente pequeña del segundo grado.

Con efecto sea AB el espacio corrido en un tiempo dado por el cuerpo en virtud de la velocidad adquirida en B, ò la velocidad en B en la direccion AB de la tangente à la curva en B, es evidente que si nó huviera desvio, corriera el cuerpo, en el mismo tiempo que AB, el espacio BF $=$ AB; pero por ser precisado el cuerpo à moverse en la direccion BC, si del punto F baxo sobre BC la perpendicular FC; será BC el espacio corrido en el mismo tiempo que AB, en virtud de la velocidad adquirida en B: ahora si del punto B como centro, con el radio BC describo el arco CE, podrá mirarse este arco como una perpendicular baxada desde el angulo recto C del triangulo rectangulo BCF sobre su hypotenusa BF; en cuyo caso tendremos BE : CE :: CE : EF; pero por ser el angulo ABC infinitamente obtuso, es su suplemento CBF infinitamente agudo, y por consiguiente su medida CE un infinitamente pequeño del primer grado; luego en la proporcion continua $\div$ BE : CE : EF, siendo el primer termino finito, y el segundo un infinitamente pequeño del primer grado, debe ser el tercer termino un infinitamente pequeño del segundo grado; pero este tercer termino es precisamente la expresion de la velocidad perdida en virtud del desvio padecido en B: luego, &c.

PRO-

PROPOSICION XVIII.

69. EN qualquier movimiento curvilineo, Fig. 16.
los desvios del mobil respecto à una tangente, son en los primeros instantes mui cortos contados desde el paso por el punto de contacto, con corta diferencia como los quadrados de estos mismos instantes.

Sea AKH un semicirculo cuyo diametro es AH, AE la tangente en A; I, F, dos puntos infinitamente proximos al punto A; de estos puntos baxando à la tangente AE, y al diametro AH las perpendiculares FE; ID; FC, IB, por la propiedad del circulo tenemos $\overline{BI}^2 : \overline{CF}^2 :: AB \times BH : AC \times CH$; pero BH, y CH no difieren de AH sino de una cantidad infinitamente pequeña, y por consiguiente deben reputarse por iguales entre sí, lo que dá $\overline{BI}^2 : \overline{CF}^2 :: AB : AC :: DI : EF :: \overline{AD}^2 : \overline{AE}^2$; pero en esta proporcion AD y AE, que aqui se toman à voluntad, pueden representar el tiempo que emplea el mobil en correr los espacios BI, BF, de su curva; en cuyos tiempos los desvios de la tangente son DI, EF, y como toda curva en un espacio corto se confunde con la curvatura de su circulo osculador; se sigue, &c.

70. *Observacion.* En las fuerzas centrales, por los terminos de fuerza uniforme, fuerza tangencial uniforme, no debe entenderse una fuerza que haga describir al mobil espacios iguales en tiempos iguales: pues sin embargo de ser esta fuerza producida por un impulso primitivo dado en una direccion determinada, se vé que, por la fuerza central que obra continuamente, no solo debe desviarse el mobil

bil à cada instante de esta direccion y las demas que vaya tomando, sino tambien mudar à cada instante su velocidad: así por fuerza uniforme, fuerza tangencial uniforme se debe entender el espacio que à cada instante corriera un cuerpo con la velocidad que actualmente tiene, si de repente cesara de obrar la fuerza central.

PROPOSICION XIX.

71. LA superficie ò arëa comprehendida
Fig. entre un arco qualquiera de una tra-
17. yectoria, y dos rectas tiradas de los extremos de este al punto central, es siempre como el tiempo empleado en describir este arco.

Sea S el centro de fuerzas, PQ, Q*p*, *po*, tres arcos infinitamente pequeños de una trayectoria descrita en virtud de una fuerza tangencial, y de una central dirigida al punto S; en virtud del espacio PQ descrito por el mobil en el primer instante, describirá este mobil en el instante siguiente, en la prolongacion de PQ, el espacio QF = PQ; pero si estando en Q recibe el mobil una impresion hácia el centro S capáz de hacerle describir QG, en el mismo tiempo que huviera descrito QF de un movimiento uniforme, es evidente que en este mismo tiempo debe describir la diagonal Q*p* del paralelogramo FG.

Del mismo modo se hallará que si en el mismo tiempo debiera el mobil describir el espacio *p*E en virtud de la velocidad adquirida en *p*, y está atraido hácia el centro S de la cantidad *p*H, describirá este mobil la diagonal *po*, del paralelogramo EH; pero por ser F*p* paralela QS, y E*o* paralela à *p*S, son los triangulos PQS, Q*p*S, *po*S, iguales entre sí, luego en tiempos iguales las arëas de los

sectores

sectores correspondientes à los arcos descritos por el mobil son iguales entre sí: luego, &c.

PROPOSICION XX.

72. LA velocidad u de un mobil en un punto qualquiera de su trayectoria Q, es reciprocamente como la perpendicular SR baxada del centro de fuerzas S, à la tangente en el punto Q de la trayectoria. Fig. 18.

Siendo PQ un arco infinitamente pequeño, es la arëa del sector SPQ $= \frac{1}{2} PQ \times SR$; luego es el tiempo t empleado en correr este arco, como $PQ \times SR$; pero siendo por otra parte, el tiempo igual al espacio partido por la velocidad, será $t = \frac{PQ}{u}$; lo que dá $PQ \times SR = \frac{PQ}{u}$; y $u = \frac{1}{SR}$.

PROPOSICION XXI.

73. LA velocidad angular verdadera de un mobil en qualquier punto de su trayectoria, es siempre en razon inversa del quadrado del radio vector tirado del centro de fuerzas à este mismo punto de la trayectoria.

La velocidad angular V de un mobil en un punto P de su trayectoria, es siempre igual al arco aparente PM partido por el radio vector SP, esto es que $V = \frac{PM}{SP}$; pero en tiempos iguales las arëas de los sectores correspondientes à los arcos verdaderos descritos por el mobil son iguales entre sí;

si; lo que hace que en tiempos iguales sea PM $= \frac{1}{SQ}$, y dá V $= \frac{1}{SP \times SQ^2} = \frac{1}{SP^3}$, pues que para un instante infinitamente pequeño, SP y SQ difieren de una cantidad infinitamente pequeña.

PROPOSICION XXII.

74. SUPUESTO que los Planetas, sus Satelites, y los Cometas están contenidos en sus Orbitas por las dos fuerzas cuya naturaleza acabamos de explicar, la una tangencial, y la otra central; de lo expuesto se sigue que si del centro de fuerzas se observan los angulos descritos en su Orbita por un Planeta ò sea Cometa ò Satalite; se deducirá la relacion de todas sus distancias al punto central, y por consiguiente la figura de su trayectoria, con tanta mas exâctitud quanto mas repetidas y mas próximas unas à otras hayan sido las observaciones, principalmente al rededor de los puntos en donde es mayor y menor la velocidad del astro, y en sus distancias medias del punto central; se verá que todas ellas son unas elipses, y que en uno de sus focus reside la fuerza central que es el Sol para los Planetas y Cometas, y cada Planeta para sus Satelites. Para esta determinacion bastará en los Planetas determinar con exâctitud la mayor y menor velocidad angular de cada uno de ellos lo que dará la relacion entre su mayor y su menor distancia al centro de fuerzas; y porque en una elipse el semiexe menor es una media proporcional entre las dos distancias del centro de fuerzas à los dos extremos del exe mayor; de estas dos distancias resultará la relacion entre

entre los dos exes de la elipse para cada astro, y por consiguiente la figura de su trayectoria: y aunque desde la superficie de la Tierra en que estamos, solo se pueden observar las velocidades angulares aparentes; por la teoria de los movimientos aparentes, se reducirán estas con facilidad à las velocidades angulares vistas desde el Sol que son las que se necesitan.

DEL

DEL MOVIMIENTO
de Rotacion.

DEFINICIONES. Llamase *centro de masas* el propio que se entiende por el de gravedad quando se atiende à la accion de esta potencia en las masas. *Centro de potencias* es aquel punto en que reunidas todas las potencias en una, produce esta el mismo efecto que la suma de efectos de cada una de ellas, obrando todas en un mismo instante; y se halla este centro por el metodo de los momentos del mismo modo que el de masas ò el de gravedad, con la unica diferencia que obrando una potencia igualmente en todos los puntos de su direccion, en muchas ocasiones se puede considerar como aplicada en qualquier punto de esta direccion sin mudar su efecto, lo que con las masas nunca puede ser, debiendo estas considerarse en el sitio donde están colocadas.

Angulo giratorio es aquel que forman entre sí dos situaciones distintas de un mismo cuerpo tomadas en dos instantes consecutivos, al principio, en el discurso, ò al fin del movimiento de este cuerpo.

Centro de conversion es aquel punto de un sistema de cuerpos, que durante la rotacion de este no ha padecido movimiento alguno. Y *Exe de rotacion*, un exe que pasando por el centro de conversion es perpendicular à la direccion del movimiento de rotacion.

PRO-

PROPOSICION XXIII.

75. SEA una bara libre, inflexible, sin pesantez ni inercia, considerada como una simple extension en linea recta, cargada con varias masas consideradas como puntos, à unas distancias dadas unas de otras, è impelida por varias potencias perpendiculares à la vara, y paralelas entre sí, cuya posicion y magnitud son tambien dadas: digo, que en qualquier punto de esta vara que esté el centro de todas las potencias, se moverá el centro de masas del mismo modo que si cayera en él, el de potencias.

Demostracion. Supuesto que las direcciones de todas las potencias son perpendiculares à la vara, paralelas entre sí, y que la vara recive por la percusion toda la energia de estas, es evidente, que en qualquier punto de la vara que caiga el centro de potencias, la cantidad de movimiento de la vara, es siempre la misma; pues no puede ser esta ni mayor ni menor que lo que recive, esto es la suma de las potencias, que se supone dada: tambien es evidente que no coincidiendo en un mismo punto el centro de masas y el de potencias, la vara debe tomar dos movimientos, el uno de translacion uniforme paralelamente à si misma, y el otro de rotacion uniforme al rededor de su centro de masas; y esta uniformidad durará por todo el tiempo del movimiento si las fuerzas aplicadas fueren instantaneas; pero si las fuerzas obrantes son continuas como es el conato de la gravedad, la uniformidad del movimiento no podrá entenderse sino es para un instante infinitamente pequeño: pero de qualquier modo que sea; por el movimiento de rotacion al rededor de su centro de masas, ni pierde ni gana la vara cantidad de movi-

miento alguna; pues una de las propiedades del centro de masas es que la suma de productos de estas por sus distancias à este centro es cero; pero en el movimiento giratorio al rededor del centro de masas, las velocidades en cada punto son como las distancias à este centro; luego será tambien igual à cero la suma de productos de las masas por sus velocidades; y por consiguiente igual à cero la cantidad de movimiento adquirida ò perdida por el movimiento giratorio al rededor del centro de masas: por otra parte hemos visto que la cantidad ò suma de las fuerzas se ha trasladado toda à las masas, luego debe esta cantidad de movimiento hallarse toda en el de translacion de la vara; luego el movimieuto de translacion de esta debe executarse del mismo modo que si todas las fuerzas obráran en su centro de masas; para lo qual es necesario que el movimiento de este centro sea el mismo, esté donde estuviere colocado el centro de las potencias.

PROPOSICION XXIV.

76. DE lo expuesto en la proposicion anterior se sigue que *el espacio corrido por el centro de masas en el primer instante del choque es igual à la suma de las fuerzas partida por la suma de las masas.* Haciendo pues igual à Sf la suma de las fuerzas; igual à SM la suma de las masas, siendo dt el elemento del tiempo, será $\frac{dt\,Sf}{SM}$ el espacio corrido por el centro de masas en el primer instante despues del choque.

Nota. Esta figura *S* significa *suma.*

PRO-

PROBLEMA XVI.

77. En las mismas circunstancias que en la proposicion anterior se pide el valor del angulo giratorio producido por la accion de las fuerzas en el primer instante del movimiento.

Solucion. Si se considera solo el movimiento de rotacion con separacion al de translacion se verá en primer lugar que executandose este movimiento al rededor del centro de masas, cada cuerpo resistirá à la accion de las potencias en virtud del momento de la cantidad de movimiento que le comunican estas potencias, y que este momento debe referirse al centro de masas: pero en el movimiento de rotacion al rededor de un centro siendo la velocidad de cada cuerpo como su distancia à este centro, será la cantidad de movimiento de cada cuerpo proporcional al producto de su masa por su distancia al centro de masas; y el momento de la cantidad de movimiento respecto al mismo centro, proporcional el producto de la masa por el quadrado de su distancia al centro de masas: siendo pues la resistencia al movimiento de rotacion impreso por las potencias proporcional à la suma de momentos de la cantidad de movimiento de cada cuerpo, *será el angulo giratorio en razon inversa de esta suma de momentos.* A esta suma de productos de las masas por el quadrado de sus distancias à un centro llaman los mathematicos *momentos de inercia.*

Tambien es evidente que, si las potencias obraran todas en el centro de masas, sería el angulo giratorio igual à cero, y que permaneciendo constante la intensidad de las potencias, será este angulo tanto mayor quanto mas se aparten las potencias de este centro; pues para producir una rotacion

tacion al rededor del centro de masas, deben obrar las potencias con tanta mas energia quanto mas disten de este centro: ni es menos evidente que esta energia es proporcional à la intensidad de las mismas potencias: luego *es el angulo giratorio en razon directa de la suma de momentos de las potencias referidas al centro de masas*, ò lo que es lo mismo, *proporcional al producto de la suma de potencias multiplicada por la distancia de su centro al de masas.* Haciendo pues igual à P la distancia de estos dos centros, è igual à S la suma de momentos de inercia de todas las masas; será para el primer instante despues del choque.

$$\text{El angulo giratorio} = \frac{P\,dt\,Sf}{S}$$

esto es *igual à la suma de momentos de las potencias*, referidas al centro de las masas, *partida por la suma de momentos de inercia* de las masas referidas al mismo centro.

PROBLEMA XVII.

78. SE pide en las mismas circunstancias la distancia del centro de masas al de conversion, ò de otro modo, el radio de rotacion.

Solucion. Supuesto que la longitud de un arco de circulo de 180 gr. cuyo radio es 1, equivale à $\frac{355}{113}$, resulta que el radio de un circulo qualquiera es igual à la longitud de un arco qualquiera de este circulo partida por el angulo correspondiente, pues que en angulos iguales son las longitudes de los arcos como los radios de los circulos à que pertenecen: por consiguiente, si se mira el camino

camino andado por el centro de masas como la longitud de un arco de circulo, cuyo centro es el de conversion buscado, será el radio de rotacion igual à este camino andado por el centro de masas, partido por el angulo giratorio; esto es $= \frac{dt\,Sf}{SM}$: $\frac{Pdt\,Sf}{S}$ lo que dá el radio de rotacion $= \frac{S}{PSM}$. Esto es *igual à la suma de momentos de inercia partida por el producto de la suma de masas multiplicada por la distancia del centro de estas al de las potencias.*

PROBLEMA XVIII.

79. SI estando los cuerpos ligados entre sí, formando estos un sistema qualquiera cuya figura sea inmutable, sin estar sus partes ni en una misma linea como supusimos hasta aqui, ni aun en un mismo plano; admitiendo solo que las potencias obran en direcciones paralelas unas à otras: se propone hallar las circunstancias del movimiento de este sistema.

Solucion. Por el metodo de los momentos determino primero el centro de las masas: despues por este centro imagino un plano perpendicular à la direccion de las potencias: y suponiendo que estas obran todas inmediatamente sobre este plano (lo que es licito) busco por el mismo metodo de los momentos la posicion en este plano del centro de las potencias: por estos dos puntos y paralelamente à las fuerzas imagino otro plano que llamo *giratorio*, porque en este plano ò paralelamente à èl deben girar todos los cuerpos del sistema: por el centro de masas imagino un tercer plano perpendicular al giratorio, y paralelo à la di-

reccion

reccion de las potencias, que por ser el que en el movimiento del sistema, con los angulos que vá formando con su primitiva situacion, mide al angulo giratorio, se llama *directorio*; llamandose *exe de rotacion* la linea de interseccion de este tercer plano con el primero perpendicular à la direccion de las potencias; porque efectivamente pasa este exe por todos los centros de los circulos paralelos entre sí y al giratorio, descritos por las masas del sistema en su movimiento.

Supuesto esto, si como antes, se hace la distancia del centro de masas al de fuerzas $= P$; la suma de las fuerzas $= Sf$; el efecto de que son capaces en un instante dado $= dt\,Sf$; la suma de momentos de inercia de las masas referidas al exe de rotacion, y no como antes al centro de masas $= S$; y la suma de las masas $= SM$: por los mismos razonamientos que en los problemas antecedentes encontraremos las expresiones siguientes, identicas con las ya halladas; esto es que. . . . .

El camino andado por el centro de masas $= \dfrac{Sdt\,Sf}{SM}$

El angulo giratorio. . . . . $\dfrac{P\,dt\,Sf}{S}$

El radio de rotacion . . . . $\dfrac{S}{PSM}$

Hallandose el centro de conversion en la linea que une el centro de masas con el de fuerzas, y del otro lado de aquel respecto à este.

80. Si las potencias obran en qualesquiera direcciones, se descompondran estas en tres sistemas de fuerzas perpendiculares unos à otros, en el modo que se ha visto en el § 23, y calculando por los medios que acabamos de indicar el centro de conversion y angulo giratorio perteneciente à

cada

cada sistema de fuerzas, resultará el efecto de las potencias dadas sobre un sistema de cuerpos dado. Para dar mejor à entender lo que son estas formulas y su uso referiremos en primer lugar el angulo giratório al exemplo siguiente, y despues à otro exemplo la posicion del centro de conversion.

PROBLEMA XIX.

81. SUpongamos una vara inflexible, sin pesantez, ni inercia, cargada con los dos pesos A y B, el primero de 10 libras, y el segundo de 12, à la distancia el uno del otro de 11 pies, cuyo centro de masas distará por consiguiente del cuerpo A de 6 pies, y de 5 pies del cuerpo B; sean à mas de esto *a* y *b* dos potencias la primera $a = 20$, obrando à la distancia de 8 pies del centro de masas; y la segunda $b = 12$ paralela à la primera, obrando à la distancia 3 pies del otro lado del centro de masas. Estas potencias deben entenderse ser dos cantidades de movimiento que obrando instantaneamente sobre la vara quedan despues del choque enteramente aniquiladas, ò que dos potencias qualesquiera aplicadas à un tiempo à las referidas distancias pierden en el choque estas cantidades de movimiento.

Supuesto esto, y que la formula del angulo giratorio es $\frac{PdtSf}{S}$, repararemos que las cantidades de movimiento 20 y 12, suponen una velocidad finita, y por consiguiente un espacio corrido uniformemente en un tiempo finito, que aqui suponemos de un minuto segundo; lo que dá $20 = Sadt$; $12 = Sbdt$; y $\frac{PSdtSf}{S} = \frac{PSdt\,(a+b)}{S} = \frac{32P}{S}$

Hacien-

Haciendo despues 32 suma de fuerzas : 12 una de ellas : : 11 distancia de los puntos en que obran : $\frac{33}{8}$ distancia de la fuerza a = 20 al centro de fuerzas ; pero la distancia de la misma fuerza a al centro de masas es = 8 , quitando pues de 8 , $\frac{33}{8}$, el resto $\frac{31}{8}$ es la distancia de estos dos centros = P; del mismo modo se hallará que S = 36 A + 25 B = 360 + 300 = 660 ; resulta el angulo giratorio $= \frac{32P}{S} = \frac{32.\ 33}{8.\ 660} = \frac{31}{165}$, ahora el radio que aqui sirve de unidad aplicado à la circunferencia del mismo circulo, coge un arco de 57 gr. — 17 min. — 44 seg. $\frac{1}{9}$ con mui corta diferencia, esta cantidad multiplicada por $\frac{31}{165}$, es el valor del angulo giratorio expresado en grados, minutos, y segundos, y dá por este valor con corta diferència 10 gr. — 45 min. — 52 seg ; lo que significa que la velocidad angular del sistema de cuerpos dado es tal que el angulo que formaria en un minuto segundo su situacion al cabo de este tiempo con la situacion que tenia al principio del movimiento, sería de 10 gr, — 45 min. — 52 seg.

PROBLEMA XX.

82. PARA la segunda aplicacion sea una vara uniforme inflexible, sin pesantez, no considerando en ella mas que su inercia; sea $2a$ la longitud de esta bara ; f una fuerza unica que se le aplica à la distancia m de su centro de gravedad que aqui es su punto medio ; se pide la distancia n del centro de conversion de esta vara al mismo centro de gravedad de ella. *So-*

Solucion. La formula que dá esta distancia es $\frac{S}{PSM}$ en que $SM = 2a$, $P = m$, $S =$ suma de momentos de inercia de los elementos de la vara; haciendo pues igual à x la distancia de qualquier elemento dx de la vara à su punto medio será $S = 2Sx^2dx = \frac{2}{3}x^3 = \frac{2}{3}a^3$; lo que dá $n =$

$$\frac{S}{PSM} = \frac{\frac{2}{3}a^3}{m.2a} = \frac{aa}{3m};$$ por donde se vé que en este caso el producto mn de las dos distancias m y n de los dos centros de fuerzas y de rotacion al de gravedad es constante, è igual al tercio del quadrado de la mitad de la vara.

83. Se sigue tambien que interin no se aplique à la vara mas que una fuerza, nunca puede caer el centro de conversion en el de gravedad, pues haciendo $m = a$ que es lo mas que puede ser, resulta $n = \frac{1}{3}a$.

84. Se sigue en fin que de qualquier modo que se imagine situada una recta que pasa por el centro de masas de un sistema de cuerpos, si à esta recta se aplican dos potencias iguales y en direcciones contrarias, en qualesquiera puntos de esta recta que estén aplicadas estas potencias, girará el sistema sobre su centro de gravedad sin que este reciba movimiento alguno; esto es que será $n = 0$; lo que se evidenciará si se considera que el movimiento del centro de gravedad en qualesquiera puntos que se apliquen las potencias es siempre el mismo que si todas estas potencias se reunieran en èl; pero siendo como aqui se supone las potencias iguales y obrando en direcciones contrarias, su suma igual à

 cero

cero no puede producir en el centro de gravedad movimiento alguno.

DE LA CYCLOIDE.

Fig. 19. 85. SEA un circulo AV, cuya circunferencia descansa en A sobre una recta AB; sea AB igual à la longitud de la circunferencia AV; hagase girar el circulo sobre la recta AB de modo que su centro E describa la recta $EE'E''E''' = AB$, es evidente que llegando el punto E en E''', el punto A del circulo generante partiendo del extremo A de la recta AB, describirá una curva ACB, y llegará al otro extremo B de la misma recta AB, participando así el punto describiente A del movimiento de rotacion, y del de translacion.

La curva ACB así descrita se llama *Cycloide*, el circulo cuyo movimiento produce la cycloide se llama *circulo generante*; AB *la base*, y el punto C de la cycloide mas distante de esta base, *el vertice* de la cycloide, en fin la perpendicular CD à la base AB, è igual al diametro del circulo generante, *el exe de la cycloide.*

PROPOSICION XXV.

86. HAviendo llegado à E' el centro E del circulo generante, y à Y el punto A; digo que si del punto Y se tira al exe CD la ordenada YP', y del centro E'' se describe el semicirculo CTD que corta en T à esta ordenada, será la tangente YS en el punto Y de la cycloide paralela à la cuerda CT.

Demos-

Demostracion. Por el punto E' tiro el diametro SE'R perpendicular à la base AB ; describiendo el semicirculo SYR , cuyo arco YR es igual à la parte AR de la base , tiro las cuerdas HY , YS , que por ser apoyadas sobre el diametro SR forman en Y un angulo recto : pero llegando el punto describiente A à Y en el mismo tiempo que el circulo generante llega à descansar en el punto R de la base , es forzoso que la direccion del punto generante sea perpendicular à YR , y que el centro del circulo osculador en el punto Y de la cycloide esté en algun punto de la prolongacion de YR : luego la prolongacion del lado infinitamente pequeño de la cycloide en Y es la cuerda YS apoyada sobre el extremo S del diametro SR ; pero los arcos YR, TD , comprehendidos entre paralelas son iguales; luego lo serán tambien sus suplementos YS, TC ; y las cuerdas de estos mismos arcos serán paralelas entre sí , pero la cuerda YS es la tangente en Y: Luego , &c.

PROPOSICION XXVI.

87. SI de un punto P qualquiera del exe se tira una ordenada PQ à la cycloide que corte en M al circulo generante CMD , y se tira la cuerda CM ; digo que la longitud del arco de cycloide CQ es dupla de la cuerda correspondiente al circulo CM.

Demostracion. De un punto p infinitamente proximo à P tiro la ordenada pq , que corta en H al circulo generante , tiro la cuerda CH , prolongo CM hasta que corte en N à la ordenada pq, del punto C como centro , con el radio CH describo el arco HO , tiro en M y C las tangentes MF,

MF, CF, que se cortan en F; en Q tiro la tangente Qz paralela à la cuerda CM; por la propiedad del circulo, el triangulo CFM es isoceles, y semejante al triangulo infinitesimal MHN, cuyos lados HM, HN son por consiguiente iguales; luego la perpendicular HO baxada del vertice de este triangulo sobre su base MN divide à esta base en dos partes iguales Mo, No; siendo asi Mo diferencia de las dos cuerdas CM, CH, mitad de MN; pero por ser $MNqQ$ un paralelogramo es la diferencia Qq del arco de cycloide dupla de la diferencia Mo de la cuerda CM correspondiente en el circulo generante; luego contando desde el punto C los incrementos de los arcos de cycloide son duplos de los incrementos de las cuerdas correspondientes en el circulo: Luego, &c.

PROPOSICION XXVII.

Fig. 20. 88. SI sobre una base CC' igual à la circunferencia del circulo generante CFD, se describen dos semi cycloides DNA, AD'; y sobre la base DD' igual y paralela à CC', y con el circulo generante GHB igual al circulo CFD, se describe otra cycloide entera $DMBD'$ igual à las dos semicycloides DNA, AD'. Si atando un hilo en A y embolviendolo al rededôr de la circunferencia de la semicycloide AND, se le desembuelve despues por el extremo D, trayendolo siempre tenso, digo que con su extremo D describirá este hilo la circunferencia de la cycloide DMB, y por consiguiente que las dos semicycloides AND, AD' serán las evolutas de la cycloide entera DBD'.

PRO-

PROBLEMA XXI.

89. PARA probar esta proposicion busquemos primero la equacion à esta curva. Fig. 19.
Para esto, sea $CD = 2a$, $PC = x$, $PM = y$, $PQ = z$, de donde $z = y + MQ$; pero por la propiedad de la cycloide es $MQ = MHC$; llamando pues s à este arco, es $z = y + s$; pero en el circulo es $ds = \frac{adx}{y} = \frac{ady}{a-x}$; $dy = \frac{dx\,(a-x)}{\sqrt{2ax-xx}}$; $dx = \frac{ydy}{\sqrt{aa-yy}}$; luego $ds = \frac{ady}{\sqrt{aa-yy}} = \frac{adx}{\sqrt{2ax-xx}}$; pero $dz = ds + dy$, sustituyendo pues resulta $dz = dy + \frac{ady}{\sqrt{aa-yy}} = dx\sqrt{\frac{2a-x}{x}}$, y es esta la equacion à la cycloide buscada.

Ahora para resolver nuestra question, advertiremos que la expresion general al radio de curvatura es $\frac{ds^3}{-dx\,ddz}$ en que $ds^2 = dx^2 + dz^2$; por la equacion à la curva que acabamos de determinar, hallo que $ddz = -\frac{adx^2}{x\sqrt{2ax-x^x}}$; $ds^3 = dx^3\left(\frac{2a}{x}\right)^{\frac{3}{2}}$ 20.
sustituyendo pues resulta el radio de curvatura $R = 2\sqrt{4aa-2ax}$ esto es que $\frac{1}{2}R$ es medio proporcional entre el diametro $2a$ del circulo generante, y la abcisa $2a-x$. Si pues de un punto

M

M de la cycloide DBD' tiro à su exe GB la ordenada MP que corte en H al circulo generante GHB, y tiro la cuerda GH, las denominaciones que corresponden à las de la fig. 19. son $GB = 2a$, $BP = x$ lo que dá $GH = \sqrt{GP \times GB} = \sqrt{4aa - 2ax} = \frac{1}{2}R$.

Pero siendo iguales por el supuesto los circulos generantes CFD, GHB, si sobre sus diametros se toman las partes iguales DL, GP; se tiran las ordenadas paralelas LFN, PHM, hasta sus correspondientes cycloides, y las cuerdas DF, GH, serán estas cuerdas iguales: es así que el arco DN es igual à la parte del hilo desembuelta y tangente en N; luego esta parte desembuelta es doble de la cuerda DF, ò doble de la cuerda GH; hemos demostrado que el radio de curvatura en M es doble de la cuerda GH, luego es este radio de curvatura igual à la parte desembuelta del hilo tangente en N.

Cuya conseqüencia es que las dos semi cycloides AND, AD' son las evolutas de la cycloide entera DBD'.

Observacion. Si la base de la cycloide, interin describe à esta curva su circulo generante, tiene algun movimiento propio, ya sea en la misma direccion del centro de este circulo, ò ya en direccion contraria; en tal caso será la cycloide descrita, alargada en el primer caso y acortado en el segundo, y si la base sobre que gira el circulo generante es otro circulo, ò una elipse, toma la curva descrita el nombre de *epicycloide*, alargada, acortada, ò simple segun sea el movimiento del circulo ò de la elipse base de la epicycloide, directo, retrogrado ò ninguno respecto al movimiento del circulo

circulo generante; y son estas epicycloides las figuras que los planetas observados desde la superficie de la tierra parecen describir en el Cielo, cuyas figuras se sacan por el metodo descrito en el capitulo de los movimientos aparentes.

90. Las quatro propiedades de la Cycloide que acabamos de demostrar son pues:

1. Que si de un punto qualquiera de su circunferencia se tira una ordenada à su exe que corte al semicirculo generante en otro punto, y de este hasta el vertice de la curva una cuerda al circulo generante; la tangente à la cycloide en el punto elegido es paralela à dicha cuerda.

2. Que la longitud de un arco qualquiera de cycloide es dupla de la cuerda correspondiente en el circulo generante.

3. Que la evoluta de una cycloide son otras dos semi-cycloides de iguales dimensiones que la cycloide dada.

4. En fin que la equacion à esta curva es $dz = dx\sqrt{\frac{2a - x}{x}}$.

DE LOS PENDULOS.

LLAMASE *Pendulo simple*, un cuerpo infinitamente pequeño ò supuesto reunido en un punto, animado de la accion de la pesantez, y fixado à un hilo infinitamente delgado, ò linea inflexible, y obligado à girar al rededor de un punto fixo colocado en algun punto de esta linea inflexible.

El *pendulo* será *compuesto* si de este hilo así atado à un punto fixo cuelgan varios cuerpos, ò uno solo de un volumen finito, porque cada elemento

mento de este cuerpo finito hace el oficio de punto pesado que tiene en el pendulo su situacion separada de la de los demas elementos del mismo cuerpo: por la misma razon, la vara ò hilo de que cuelga un cuerpo es por sí un pendulo compuesto si se le supone un grueso finito.

PROPOSICION XXVIII.

91. SI atando en C un hilo, y à su extremo B un cuerpo, y que se aparte à este cuerpo de la vertical CB, para dar al pendulo la situacion CD, y despues se le dexa en libertad, el cuerpo D por la accion de la gravedad, bolverá hácia la vertical con un movimiento acelerado; despues por la velocidad adquirida, si se prescinde de la resistencia del medio, rigidez del hilo, y rozamiento en el punto de suspension, pasará de la vertical CB con un movimiento retardado para llegar hasta C*d* igualmente distante que CD de CB, en cuyo punto haviendo perdido toda su velocidad, bolverá à la vertical, la pasará para llegar à la situacion CD, y executaria así eternamente sus idas y venidas, à no ser por los ostaculos que hemos notado: cada una de estas idas y venidas, ò cada transito de D à *d*, ò de *d* à D, se llama una *oscilacion*.

Fig. 21.

Esto supuesto, y que el angulo giratorio en la vara libre, para un instante dt, es $\frac{P\,dt\,Sf}{S}$; veamos, para buscar este angulo giratorio en el pendulo, que mutaciones debemos hacer en esta formula.

PROPOSICION XXIX.

92. En primer lugar, no difiriendo el pendulo de la vara libre mas que por tener aquel un punto fixo que no tiene esta, es evidente que si en la vara libre se supone fixada una masa cuya inercia sea infinita, la imposibilidad de moverse esta masa hará en la vara el mismo oficio que el punto fixo en el pendulo; pues una masa cuya inercia es infinita reune en sí el centro de quantas masas puede haver en la vara; luego en el punto donde esté colocada esta masa, está el centro de masas à que se refieren los momentos; y por consiguiente en el pendulo la formula del angulo giratorio será la misma que la de la vara libre, con la advertencia que en el pendulo, P será la distancia del centro de fuerzas al punto fixo, y S la suma de momentos de inercia de las masas referidas al mismo punto.

En segundo lugar, siendo aqui las potencias aplicadas à los cuerpos y proporcionales à las masas de estos, es evidente que el centro de potencias será el mismo que el de las masas aplicadas al pendulo.

En tercer lugar, siendo la gravedad la unica potencia que obra en los pendulos, y siendo vertical su direccion, forma esta mientras obra sobre el pendulo un angulo que varía segun es la situacion de este pendulo; luego si se llama *m* à este angulo variable, la accion de la pesantez perpendicular al pendulo será la accion absoluta de esta pesantez multiplicada por sen. *m*.

En quarto lugar, siendo la fuerza que anima à cada cuerpo para formar el angulo giratorio en un instante dado, lo que resulta de la accion de la pesantez desde el principio del movimiento hasta

este instante; se sigue que la potencia obrante para un instante dado es, $Sfdt.$ sen. m.

Luego para un instante dado dt, será la expresion del angulo giratorio en el pendulo $\frac{Pdt\,Sfdt.\ sen.\ m}{S} = \frac{PfdtSdt.\ sen.\ m}{S}$; por ser f constante.

En el pendulo simple en que el cuerpo es unico, es $S = MP^2$; lo que en este caso reduce el angulo giratorio à ser $\frac{fdtSdt.\ sen.\ m}{MP}$.

PROPOSICION XXX.

93. SI pues se suponen iguales los angulos giratorios en el pendulo simple y en el compuesto, y para distinguir las distancias de los centros de masas al punto fixo en el pendulo compuesto y en el simple, se hace igual à P' la distancia del punto fixo à la masa unica del pendulo simple; será $\frac{PfdtSdt.\ sen.\ m}{S} = \frac{fdtSdt.\ sen.\ m}{P'M}$; lo que dá $P' = \frac{S}{PM}$; y si la masa M del pendulo simple es igual à la suma de las masas del pendulo compuesto, se vé que *para hallar la longitud del pendulo simple, cuyo angulo giratorio en qualquier instante de su movimiento, sea igual al del pendulo compuesto en el mismo instante, se debe tomar la suma de momentos de inercia de los cuerpos del pendulo compuesto referidos al punto fixo, y partir esta suma de momentos por el producto de la suma de las masas por la distancia de su centro de gravedad al punto fixo, ò*

lo

lo que es lo mismo, partir esta suma de momentos de inercia por la suma de momentos de las masas referidas al punto fixo; el cociente es la longitud del pendulo simple buscado.

Pero si en estas circunstancias el angulo giratorio para cada instante es el mismo en ambos pendulos, se sigue que estos executarán sus oscilaciones en el mismo tiempo. Los pendulos que se hallan en estas circunstancias se llaman *Isocronos.*

De esta doctrina se sigue que hallada la longitud del pendulo simple isocrono con el compuesto, si sobre este segundo pendulo se señala un punto distante del punto fixo de la longitud del pendulo simple, y se suponen reunidas en él todas las masas del pendulo compuesto; el nuevo pendulo será tambien *Isocrono* con el compuesto; en cuyo caso se llama este punto *Centro de oscilacion.*

PROPOSICION XXXI.

94. EN el Torno en que las potencias obran en direcciones paralelas, P es un peso colgado del tambor de la maquina, $Q + x + g$ una potencia aplicada á la circunferencia de la rueda, y S la suma de momentos de inercia de todas las demas partes de la maquina que hayan de moverse en virtud de la accion de sola la potencia g, siendo $Q + x$ la potencia que hace equilibrio con el peso P y la resistencia del rozamiento; llamando ademas p la fuerza aceleratriz producida por la accion de la potencia g, p la accion libre de la pesantez, c la distancia de $Q + x + g$ al centro de la maquina, y b la distancia de la potencia P al mismo centro: hemos dicho (§ 23) que,

$p =$

$\overset{\prime}{p} = p \dfrac{g.\,cc}{\times P.bb + S + (Q + x + g)\,cc}$; la demostracion es como se sigue.

Estando por lo supuesto las potencias P, Q + x, y M. masa de toda la maquina, en equilibrio, se sigue que no resisten estas potencias sino por su inercia à la accion del peso g añadido à la potencia Q + x para poner la maquina en movimiento: luego no variando la distancia c, de la potencia g al centro de rotacion, tampoco variará el numerador $Pf\,dt\,Sdt.\ sen.\ m$, del valor $\dfrac{Pf.\,dt\,Sdt.\ sen.\ m}{S}$ del angulo giratorio, y siendo así que las masas resisten à la accion de la potencia en razon de sus momentos de inercia, si en lugar de P colocado à la distancia b del centro de rotacion, se supone que una masa $P \times \dfrac{bb}{cc}$ esta colocada à la distancia c del mismo centro, y que à todas las piezas de la maquina se les haya hecho sufrir la misma mutacion en su masa y distancia à dicho centro, lo que dará $\dfrac{S}{cc}$ por la masa que podrá suponerse en lugar de M à la distancia c del centro de rotacion; claro está que esta variacion nada muda al angulo giratorio, pues que el valor de S y el de P. bb quedan los mismos: pero como entonces todas las masas se suponen colocadas à la misma distancia c del centro de la maquina, y que en este caso los efectos de una misma fuerza aceleratriz que obra sobre diferentes masas están en razon inversa de estas masas, resulta esta proporcion, g (masa que obra para mover la maquina) es à $P \times \dfrac{bb}{cc} + \dfrac{S}{cc}$

Q

$Q + x + g$ (suma de las masas puestas en movimiento por la accion de la potencia g), como p' (efecto de la fuerza aceleratriz que obra en la maquina), es à p (efecto de la fuerza aceleratriz libre ò accion libre de la pesantez), de donde se saca $p' = p \frac{g.cc}{P.bb + S + (Q + x + g)\,cc}$.

PROPOSICION XXXII.

95. DOS pendulos desiguales apartados de la vertical de una misma cantidad angular, executan sus oscilaciones en tiempos que son como la raiz quadrada de sus longitudes.

Demostracion. Siendo semejantes los arcos descritos por los dos pendulos, se componen estos arcos de igual número de lados infinitamente pequeños, cuya inclinacion al horizonte es igual en cada par de ellos; por consiguiente la intensidad de la fuerza aceleratriz es la misma en cada dos elementos correspondientes de estos arcos; pero los tiempos empleados en correr espacios desiguales con una misma fuerza aceleratriz son como las raices quadradas de estos espacios: luego los tiempos empleados en correr cada par de elementos correspondientes de los dos arcos dados tomado uno de cada arco, serán como las raices quadradas de estos elementos, ò como las raices quadradas de las longitudes de los pendulos; pero ambos arcos se componen de igual número de elementos: luego, &c.

La consegüencia de esta proposicion es que *el número de vibraciones de dos pendulos es, en un mismo tiempo dado, en razon inversa de la raiz quadrada de las longitudes de estos pendulos.*

PRO-

PROPOSICION XXXIII.

96. La velocidad de un pendulo, quando llega à la vertical que pasa por su punto de suspension, es como la cuerda del arco descrito por este pendulo.

Fig. 21. *Demostracion.* Sea CB la longitud del pendulo, DEB el arco descrito; del punto C como centro, con el radio CB describo el circulo entero ADEB, tiro el radio CD, la cuerda AD, y la ordenada PD al diametro AB; la velocidad en B, despues de haver descrito el arco BD, es la misma que si un cuerpo cayera libremente de P à B; luego la velocidad en B es como $\sqrt{PB}$; pero en el circulo $PB \times BA = \overline{DB}^2$, ò por ser BA en un mismo pendulo constante, será siempre PB como $\overline{DB}^2$, ò $\sqrt{PB}$ como DB: luego, &c.

PROPOSICION XXXIV.

97. Dos pendulos serán isocronos si sus longitudes son como las fuerzas aceleràtrices que los animan.

Demostracion. Se sabe que en tiempos iguales los espacios corridos son como las fuerzas aceleratrices en cuya virtud se describen estos espacios: pero si dos pendulos animados de diversas fuerzas aceleratrices se apartan de la direccion de estas fuerzas de una cantidad angular igual; los arcos que tendrán que describir para llegar à esta vertical, se compondrán de igual número de elementos iguales entre sí en cada arco, y de un arco à otro proporcionales à la longitud de los pendulos à que per-

pertenecen: luego si los espacios corridos en un mismo tiempo son como las fuerzas aceleratrices; los elementos de cada arco, como las longitudes de los pendulos, y por lo supuesto las fuerzas aceleratrices como estas longitudes; serán corridos en un mismo tiempo los elementos correspondientes de ambos arcos, y por consiguiente tambien los arcos enteros; luego serán los pendulos *Isocronos*.

PROBLEMA XXI.

98. HALLAR el tiempo de la caída de los graves por la cycloide.

Solucion. Supongamos que el cuerpo M cae desde el reposo por el arco ME de la cycloide DMEB, cuyo circulo generante es GNIB, su exe GB; sea GP $= b$, PO $= x$, por la propiedad de la cycloide es su arco BE $= 2$BI, y haciendo el diametro del circulo GB $=$ D, por la propiedad del circulo, es BI $= \sqrt{D \times (D - b - x)}$, luego es el arco BE $= 2\sqrt{D\,(D - b - x)}$, y su diferencial, $ds = -\frac{dx\sqrt{D}}{\sqrt{D - b - x}}$, por consiguiente la diferencial del arco ME $= \frac{dx\sqrt{D}}{\sqrt{D - b - x}}$; siendo ahora (§ 46) $dt = \frac{de}{u}$, y (§ 37) $u = \sqrt{2pe}$, resulta $dt = \frac{de}{\sqrt{2pe}}$; pero en la primera equacion $dt = \frac{de}{u}$, de es la diferencial del espacio corrido realmente por el cuerpo en su cycloide, lo que hace à $de = ds$; quando en la segunda Fig. 22.

gunda equacion $u = \sqrt{2pe}$, e debe representar la altura vertical de donde ha caído el cuerpo, porque (§ 40) qualesquiera que sean las longitudes de planos inclinados, ò sean curvas; la velocidad adquirida por un cuerpo en su carrera al fin de estos planos ò curvas, como su altura sea la misma, es igual à la que adquiere cayendo libremente de esta altura, lo que hace en $\sqrt{2pe}$, à $e = x$, y $dt = \frac{ds}{\sqrt{2px}} = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{2p}} \times \frac{dx}{\sqrt{Dx-bx-xx}}$; pero siendo R el radio de un circulo, y x el seno de un arco de este circulo, es la diferencia del arco igual à $\frac{Rdx}{\sqrt{2Rx-xx}}$, comparando esta formula con la del valor de dt, hallaremos que $R = \frac{D-b}{2}$, despues $dt = \frac{2\sqrt{D}}{(D-b)\sqrt{2p}} \times \frac{\frac{D-b}{2} \times dx}{\sqrt{(D-b)x-xx}}$ lo que dá $t = \frac{2\sqrt{D}}{(D-b)\sqrt{2p}} \times$ arco de circulo cuyo seno es x, y cuyo radio es $\frac{D-b}{2}$; ò $t = \frac{2\sqrt{GB} \times Arco\ PR}{\sqrt{2p} \times PoB}$; y el tiempo de la caída desde M hasta B igual à $\frac{2\sqrt{GoB}}{\sqrt{2p}} \times \frac{PRB}{PoB}$; pero $\frac{PRB}{PoB}$ es una cantidad constante igual à la relacion de la semi circunferencia de un circulo à su diametro, igual à $\frac{1}{4}$C, siendo C la circunferencia del

del circulo cuyo radio es la unidad, lo que dá la expresion del tiempo empleado en baxar desde un punto qualquiera M de la cycloide hasta el punto B mas baxo de ella, igual à $\frac{C\sqrt{GoB}}{2\sqrt{2p}}$.

Corolario primero.

99. La conseqüencia de esta proposicion es que de qualquíera punto de una cycloide que empiece à caer un cuerpo, el tiempo que empleará este cuerqo para llegar al extremo inferior de su cycloide será siempre el mismo; esto es que las oscilaciones de un pendulo que gira en una cycloide, sean estas grandes ò chicas, son siempre isocronas.

Corolario segundo.

100. Siendo además en la caída libre (§ 37) $t = \left(\frac{2e}{p}\right)^{\frac{1}{2}}$, para conocer la altura de donde caerá un cuerpo libremente en el mismo tiempo que otro executa una semi-oscilacion en una cycloide dada, se vé que formando la equacion $\frac{C\sqrt{GoB}}{2\sqrt{2p}} = \left(\frac{2e}{p}\right)^{\frac{1}{2}}$, resulta $e = \frac{1}{16}$ CCD; por consiguiente la altura de donde cae un cuerpo interin otro executa una oscilacion entera, por ser doble este tiempo del que emplea en describir una semi-oscilacion, es $4e = \frac{1}{4}$ CCD ò por ser la longitud L de un pendulo que describe arcos de cycloide dupla del diametro D de su circulo generante, es esta altura igual à $\frac{1}{8}C^2L$. Sustituyendo este valor por e, en

la equacion $t = \sqrt{\frac{2e}{p}}$ resulta $t = \frac{1}{2}C\sqrt{\frac{L}{p}}$, y $tt = \frac{CCL}{4p}$ lo que hace ver que las longitudes de los pendulos son como los quadrados de los tiempos que emplean estos pendulos en executar estas oscilaciones.

Corolario tercero.

101. Siendo la razon de la circunferencia al diametro la de 355 à 113, resulta $\frac{1}{2}C = 3, 1416$; de donde $\frac{1}{4}CC = 9, 8696$; suponiendo pues, lo que es mui próximo à la verdad, que la longitud del pendulo que bate los segundos en España es de 469, 5 lineas medida inglesa; la equacion $tt = \frac{CCL}{4p}$ da, haciendo $t = 1$, $p = \frac{1}{4}CCL = 9, 8696 \times 469, 5 = 32$ pies 2 pulgadas y 2 lineas con mui corta diferencia, que equivalen à 30 pies 2 pulgadas y 2 lineas pie de Paris; y como la velocidad adquirida al fin de un espacio corrido por un movimiento uniformemente acelerado es doble de este espacio, se sigue que la altura de donde caen los graves en un minuto segundo en la superficie de la tierra es de 16 pies 1 pulgada 1 linea, medida inglesa; cuya corta diferencia con el número quadrado 16 que facilita mucho los calculos fue el motivo de establecer esta altura de 16 pies cabales.

En el Equador donde la longitud del pendulo que bate los segundos es de 468 lineas, caerá un cuerpo en un segundo de tiempo de la altura de 16 pies, o pulgadas, y 5, 5 lineas; y en el Polo donde esta longitud es poco mas de 471 lineas, la altura de donde cae un grave en el mismo tiempo es 16

pies,

pies, 1 pulgada y 9, 5 lineas, cuya diferencia no pasa como se vé de 1 pulgada y 4 lineas.

PROPOSICION XXXV.

101. POR este medio se puede saber tambien qual es la relacion entre el diametro del equador, y el exe que pasa por los polos de la tierra: con efecto, sabiendose la relacion de las longitudes de los pendulos que baten los segundos en el equador y en el polo, y que prescindiendo del efecto de la fuerza centrifuga que procede del movimiento diurno de la tierra, cuyo valor en un segundo de tiempo disminuye de 8, 6 lineas la altura de la caída de los graves en la equinocial; sigue la accion de la pesantez la razon inversa de los quadrados de las distancias al centro ò (§ 97) la directa de las longitudes del pendulo que bate los segundos; resultará que la relacion de las distancias al centro de la tierra será la inversa de la raiz quadrada de estas longitudes.

PROBLEMA XXII.

CON estos datos se pide el tiempo de la baxada de un grave por un arco de circulo dado.

Solucion. Siendo (§ 98) $dt = \frac{ds}{8\sqrt{x}}$ sea AB $= a$ el radio del circulo dado, D el principio de la baxada del cuerpo, y por tanto AG $= b$, sea G$t = x$, tQ $= y$, Q$q = ds$, por la propiedad del circulo es $ds = \frac{a\,dx}{y} = \frac{a\,dx}{\sqrt{aa - (b+x)^2}}$ Fig. 21.

susti-

sustituyendo en la formula $dt = \frac{ds}{8\sqrt{x}}$, será $dt = \frac{adx}{8\sqrt{x}\sqrt{aa-(b+x)^2}}$ cantidad que reducida à serie, è integrada dará el tiempo buscado.

Si las oscilaciones de un pendulo son pequeñas y se executan en arcos de circulo como de 2 ò 3 grados degeneran estos en arcos de cycloide, por cuyo motivo las oscilaciones en el circulo, quando son estas mui pequeñas, pueden reputarse por isocronas, con tanta mas exâctitud quanto mas pequeños son los arcos descritos.

PROBLEMA XXIII.

Fig. 21. 102. HALLAR la curva del mas breve descenso llamada *Brachistochrona*. Sean A y B dos puntos dados por donde haya de pasar un cuerpo animado solo de la accion de la gravedad: por estos dos puntos imagino un plano vertical y por A la recta horizontal AP; supuesto el problema resuelto y sobre la curva AB tomados dos elementos consecutivos, MM' y $M'M''$; desde M, M′, M″ lebanto sobre AP las perpendiculares, MP, M′P′, M″P″; hago AP $= x$, AP′ $= x' = x + dx$, AP″ $= x'' = x' + dx' = x + 2dx + ddx$, PM $= y$, P′M′ $= y' = y + dy$, P″M″ $= y'' = y + 2dy + ddy$, AM $= s$, AM′ $= s' = s + ds$, AM″ $= s'' = s + 2ds + dds$. Supuesto esto, ha-

viendo llegado el cuerpo al punto M, debe tener la misma velocidad que si huviera caido de la altura vertical PM, y será el tiempo empleado en correr el arco AM, igual à $\int \frac{ds}{8y^{\frac{1}{2}}}$; luego $\int \frac{ds}{y^{\frac{1}{2}}}$ debe ser un *minimo.*

Para expresar esta condicion, supongo que, siendo fixos los puntos M, M'', varia la posicion del punto M' de una cantidad infinitamente pequeña en la direccion horizontal; como si el cuerpo para llegar de M à M'', en lugar de pasar por M', huviera de pasar por *m*, siendo así iguales las dos ordenadas $M'P'$, *mp*; es evidente que, quedando el mismo valor de y', el tiempo empleado en correr los dos espacios $MM' + M'M''$, y el empleado en correr $Mm + mM''$ serán iguales; porque es este tiempo igual à $\frac{ds}{y^{\frac{1}{2}}} + \frac{ds'}{(y')^{\frac{1}{2}}}$; pero en esta expresion, que se reduce à $\frac{y^{\frac{1}{2}}(ds + ds')}{(y.y')^{\frac{1}{2}}}$, el denominador $(y.y')^{\frac{1}{2}}$ es constante, y atendiendo à que no varia la posicion del punto M' mas que en la direccion horizontal, en que no tiene influxo la accion de la gravedad, se verá que la parte $ds +$

ds'

ds' del numerador la unica que pudiera variar, tampoco lo puede, por no poder mudar la expresion del tiempo empleado en correr MM'', y por consiguiente su diferencia ò la de $\frac{ds}{y^{\frac{1}{2}}} + \frac{ds'}{(y')^{\frac{1}{2}}} =$ $\frac{dds}{y^{\frac{1}{2}}} + \frac{dds'}{(y')^{\frac{1}{2}}} = o.$

Siendo ahora $ds^2 = dx^2 + dy^2$, será $dsdds =$ $dxddx + dyddy$: pero en la curva buscada ddy $= o$, luego $dsdds = dxddx$, y, $ds'dds' = dx'ddx'$ lo que dá $\frac{dxddx}{dsy^{\frac{1}{2}}} + \frac{dx'ddx'}{ds'(y')^{\frac{1}{2}}} = o$; pero siendo dx $+ dx'$ una cantidad constante, es $ddx + ddx' = o$, ò $ddx = - ddx'$, y por consiguiente $\frac{dx}{dsy^{\frac{1}{2}}} =$ $\frac{dx'}{ds'(y')^{\frac{1}{2}}}$, ò lo que es lo mismo $D\left(\frac{dx}{dsy^{\frac{1}{2}}}\right)$ $= o$, y es la equacion à la curva.

Si se integra esta equacion, resulta $\frac{dx}{dsy^{\frac{1}{2}}} =$ $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$, ò $adx^2 = yds^2$, ò $adx^2 - ydx^2 = ydy^2$, ò $dx = \frac{dy.y^{\frac{1}{2}}}{(a-y)^{\frac{1}{2}}}$, cuya equacion comparada con la que hemos hallado tratando de la cycloide,

y

y fue $dx = \frac{dz(2a-x)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$, no se diferencia, como se vé, de ella mas que en las denominaciones; luego la curva buscada es la cycloide.

Ahora para hacer pasar por los puntos A y B la cycloide buscada, se trazará sobre una horizontal AP tomada à voluntad y pasando por el punto A mas elevado de los dos dados, una cycloide AKP que encontrará en K à la recta AB; tirando KP, y à KP por el punto B la paralela BF, será AF la base de la cycloide buscada, ò la circunferencia de su circulo generante, por donde se describirá con facilidad la cycloide buscada; cuya razon es que todas las cycloides son unas curvas semejantes. Fig. 23.

HIDRAULICA.

CONSIDERACIONES FISICO-MATHEMATICAS sobre el modo de medir la resistencia de los Fluidos al movimiento de los Solidos sumergidos en ellos.

LEMA. La velocidad de una molecula de un fluido al salir por un orificio hecho en las paredes ò en el fondo de un vaso lleno de este fluido es igual à la que adquiere un grave cayendo libremente de la altura de este fluido sobre el orificio, ò mas bien de una altura igual à la distancia vertical de la molecula à la superficie superior del fluido contenido en el vaso.

Demostracion. La presion que padece una molecula de un fluido en todos sentidos es igual al peso de la columna vertical de este fluido que descansa sobre esta molecula; esto es à la suma de todas las acciones que exerce la gravedad sobre cada una de las moleculas de que se compone esta columna vertical, ò à la accion de la gravedad sobre una molecula multiplicada por el número de ellas: luego si por alguna parte le viniera à faltar à la molecula cuya presion se considera, la resistencia à esta suma de acciones, se movería realmente esta molecula en la direccion en que se hallaria esta falta de resistencia, con una velocidad igual à la que produce la accion de la pesantez en un instante, multiplicada por el número de moleculas que se hallan en la vertical contada desde la superficie del fluido

fluido hasta la molecula considerada, ò por el número de elementos que hai en esta altura; pero la velocidad que adquiriera un grave cayendo de una altura es tambien igual à la que produce la misma accion de la gravedad en un instante, multiplicada por el número de elementos de que se compone esta altura: luego, &c. (*a*)

Supuesto esto, sea p la velocidad que adquiriera un cuerpo cayendo libremente por espacio de un minuto segundo, y a la altura del fluido sobre el orificio, hemos visto (§ 37) que $(2ap)^{\frac{1}{2}}$ es la velocidad correspondiente à la altura a, la que valuada en pies ingleses, se reduce à $8a^{\frac{1}{2}}$, con mui corta diferencia.

103. Si se supone ahora un embolo puesto en el orificio de un vaso para impedir la salida del fluido, necesita este embolo para mantenerse en equilibrio contra el impulso del fluido, una potencia igual al peso de una columna del mismo fluido cuya base sería la area del orificio, y con una altura igual à la del fluido sobre el centro de gravedad de este orificio: cuya conseqüencia es que para un mismo fluido, a es la altura de este fluido que expresa la presion debida à la velocidad $8a^{\frac{1}{2}}$, y por consiguiente que dada una velocidad u, para tener la altura de la columna de fluido que expresa la presion que procede de esta velocidad, esta misma se partirá por 8 y el cociente se elevará al quadrado, lo que dará $a = \frac{1}{64}uu$; (à esta altura $a = \frac{1}{64}uu$ la llamaremos *altura correspondiente à la velocidad u*); y $u = 8a^{\frac{1}{2}}$.

(*a*) Nota. Esta misma proposicion se halla demostrada con mucha elegancia en el compendio de D. Benito Bails.

Esto es en quanto quede el embolo en estado de quietud, en lo que todos los pareceres de los Hidraulicos están conformes. Pero no sucede lo mismo quando el embolo tiene algun movimiento propio.

Unos con Eulero, Newton y los demás Mathematicos de la Europa, tomando la altura del fluido correspondiente à la velocidad del embolo, la añaden à la altura del fluido sobre este embolo, y pretenden que esta suma es la presion que padece el embolo en virtud de su movimiento propio y de la altura del fluido que sostiene.

Otros con Don Jorge Juan establecen que para valuar esta presion, se debe añadir la velocidad real del embolo, con la que corresponde à la altura del fluido sobre el orificio, y que el sesenta y quatro-avo del quadrado de esta suma es la altura de la columna cuyo peso es la presion que padece en este caso el embolo; de suerte que siendo a la altura del fluido sobre el embolo, y u la velocidad de este

Segun Eulero y demás Mathematicos, es la presion que padece el embolo igual à una columna de fluido cuya altura sería igual à, $a + \frac{1}{64} uu$; y segun Don Jorge Juan, igual à $(a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8} u)^2 = a + \frac{1}{4} a^{\frac{1}{2}} u + \frac{1}{64} uu$; dos resultados, como se vé, mui distintos el uno del otro.

Si despues se supone una superficie plana de una altura infinitamente pequeña sumergida enteramente en el fluido, y en reposo, por razon de la presion del fluido cada una de las dos caras de esta superficie padecerá una presion igual à una columna del fluido cuya base sería la arëa de esta superficie,

ficie, y la altura la del fluido sobre esta superficie, destruyendose así ambas presiones por ser iguales entre sí; pero si la superficie sumergida tiene algun movimiento propio, mudan las cosas de naturaleza, por una parte se aumenta la presion por el movimiento, y por la otra se disminuye: llamando pues impelente la cara que mira hácia la direccion del movimiento, è impelida à la otra; será segun Eulero $a + \frac{1}{64} uu$ la presion que padezca la cara impelente de la superficie movida, y $a - \frac{1}{64} uu$ la que padezca la cara impelida, resultando así que la resistencia que opone el fluido al movimiento de la superficie sumergida es igual à una columna de fluido cuya base es la arëa de esta misma superficie, y cuya altura es $\frac{1}{32} uu$, ò la dupla columna de fluido que corresponde à la velocidad u de la superficie sumergida; pues que la presion que padece la cara posterior ò impelida de la superficie sumergida oponiendose diametralmente à la que padece la cara anterior ò impelente de la misma, la resistencia total del fluido al movimiento de esta superficie debe ser la diferencia de ambas presiones.

104. En el sistema de Don Jorge Juan, la impresion que recibe la cara impelente es, $a + \frac{1}{4} a^{\frac{1}{2}} u + \frac{1}{64} uu$, y la que recibe la impelida es $(a^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8} u)^2 = a - \frac{1}{4} a^{\frac{1}{2}} u + \frac{1}{64} uu$, cuya diferencia $\frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} u$ es la resistencia total del fluido al movimiento de la superficie sumergida.

105. En el primer sistema, nada influye para la medida de esta resistencia la altura ò profundidad à que esta sumergida la superficie, y solo es la

dupla

dupla columna correspondiente à su velocidad; quando en el segundo es esta resistencia igual al producto de la velocidad simple u, multiplicada por la mitad de la raiz quadrada de la altura à que está sumergida la superficie.

106. Esta diferencia entre estos dos sistemas es tan notable que qualquiera de los dos que se admita, resulta necesariamente la esclusion del otro: un solo exemplo hará ver lo fundado de este aserto.

Supongamos una superficie de un pie quadrado sumergida à 100 pies de profundidad en el agua, y que esta superficie tiene un pie de velocidad por minuto segundo, en cuyo caso es $a = 100$, $u = 1$, y la arëa de la superficie $= 1$.

La formula de resistencia de Don Jorge Juan $\frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}u$, indica que la resistencia del agua al movimiento de esta superficie es equivalente al peso de cinco pies cubicos de agua, que à razon de 58 libras por pie cubico importan 290 libras de resistencia.

Quando en el sistema de Eulero, esta resistencia igual à $\frac{1}{32}uu$, no llega à dos libras.

Es digna de notarse esta diferencia tan enorme, y mui estraño que un Newton, y un Eulero con toda su perspicacia, no hayan conocido la falsedad de su sistema si es que el de Don Jorge Juan sea verdadero.

Lo sensible es que los medios directos de conseguir con una perfecta exâctitud la medida de esta resistencia, sean tan dificiles: los Señores Mariotte, y Ammontons han concluido de sus experimentos lo propio que han admitido Newton y Eulero; Don Jorge Juan pretende que de las suyas resulta

lo propio que ha establecido; y ultimamente el Abate Bossut concluye de las suyas que en el movimiento directo, esto es quando van el solido y el fluido en direcciones diametralmente opuestas, siendo ademas la superficie del solido que aqui suponemos plana, perpendicular à esta direccion, es la resistencia del fluido à este movimiento en razon del quadrado de la velocidad combinada de la real y efectiva del fluido y del solido, sin hacer entrar en esta valuacion la altura del fluido sobre el solido: pero que, quando la superficie movida está inclinada à la direccion del movimiento del fluido, ò que el fluido y la superficie movida siguen direcciones distintas, entonces la resistencia se acerca tanto mas à ser como la simple velocidad combinada del fluido y solido, quanto mayor es la inclinacion del choque que recibe la superficie movida; pero en ningun caso hace entrar este ultimo autor la altura del fluido sobre el solido movido, para hallar la resistencia de aquel al movimiento de este.

Tambien es de notar que, para valúar la presion que recibe una y otra cara de una superficie sumergida, ninguno de los citados autores haga caso de la presion de la Atmosfera sobre la superficie del fluido; sin embargo de que esta presion que existe ciertamente è influye en la del fluido sobre ambas caras de la superficie sumergida, no es tan poca que se pueda como quiera prescindir de ella: pues se sabe que esta presion atmosferica equivale al peso de una columna de agua de 34 pies ingleses de altura. Verdad es que en el sistema de Eulero la presion que procede de este peso atmosferico en la valuacion de la resistencia del agua al movimiento de un solido sumergido en ella, se destruye; porque siendo la verdadera presion que en este sistema padece la cara impelente

de

de la superficie plana sumergida igual à esta superficie multiplicada por $a + 34 + \frac{1}{64} uu$, y la que recibe la cara impelida igual al produćto de la misma superficie, por $a + 34 - \frac{1}{64} uu$, restando una impresion de otra, queda $\frac{1}{32} uu$ por la medida de la resistencia buscada, cabalmente la misma que resultó no atendiendo à la presion atmosferica.

Pero no sucede lo propio en el sistema de Don Jorge Juan, en que ciertamente debe ser esta resistencia igual à $\frac{1}{2} u (a + 34)^{\frac{1}{2}}$ diferencia entre $\left((a + 34)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8} u\right)^{\frac{1}{2}}$, y $\left((a + 34)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8} u\right)^{2}$, presiones sobre una y otra cara de la superficie sumergida; lo que para una altura de solos 15 pies, siendo la velocidad $u = 1$, y la superficie sumergida un pie quadrado, haría la resistencia del fluido à esta velocidad igual al peso de tres pies y medio cubicos de agua que equivalen à 202 libras; lo que es enteramente inadmisible: y no hai recurso, comprime la Atmosfera à la superficie del fluido, se comunica esta compresion à todas las partes del fluido en lo interior de este, ambas caras de una superficie plana sumergida en èl deben recibir y experimentan efećtivamente una presion igual à la altura de este fluido y la presion atmosferica: la prueba de esto es que si en un vaso lleno de agua se hace un agugero à 15 pies de profundidad debaxo de la superficie de esta; en el estado natural saldrá el agua por este orificio con una velocidad de 31 pies por segundo, porque entonces igual presion padece el orificio de parte de la atmosfera que la superficie del agua en el vaso, cuyas presiones equilibrandose entre sí no producen efećto alguno:

pero

pero si à la boca del orificio, por qualquier modo que sea, se produce el vacio perfecto, al modo que en los movimientos rapidos se supone producido en la parte posterior de la superficie movida; no hallando en este caso la presion atmosferica sobre la superficie del agua en el vaso, contrarresto alguno, forzoso es que produzca su efecto completo; por cuyo motivo, en lugar de 31 pies de velocidad que tenia el agua al salir por el orificio, quando la presion atmosferica se contrarrestaba asimisma, por razon del vacio producido à la boca del orificio, pasará à la de 56 pies: luego la verdadera velocidad virtual con que intenta moverse en todos sentidos una molecula dentro de un fluido, es realmente la que procede de las presiones tanto del fluido como de la atmosfera: luego ambas caras de una superficie sumergida padecerán realmente una presion correspondiente à esta misma velocidad virtual: y si ademas tiene la superficie algun movimiento propio, y que para valuar la resistencia del fluido à este movimiento, se deba, como lo pretende Don Jorge Juan, combinar la velocidad real del cuerpo con la virtual del fluido; es una contradicion manifiesta emplear à un tiempo la velocidad que procede del peso de la columna de agua, y prescindir de la producida por la presion atmosferica; luego en el sistema de este autor, en lugar de expresar, como lo pretende, $\frac{1}{2} u \sqrt{a}$ la resistencia del agua al movimiento de una superficie sumergida en ella; para esta expresion es indispensable escribir, $\frac{1}{2} u \sqrt{a + 34}$. Luego si de esta formula, general para todas especies de velocidades y profundidades dentro del agua, resulta que, à solos dos pies de profundidad, la resistencia al movimiento de una superficie de un

pie

pie quadrado, movida con un pie de velocidad por segundo es de siete arrobas, y à este tenor son todas las conseqüencias que se sacan de ella, creo no aventurar nada con decir que es enteramente inadmisible el principio que intenta establecer nuestro autor, de que *se haya de sumar la velocidad virtual procedente de la altura del fluido, con la combinada de las efectivas del fluido y de la superficie sumergida, ò restar esta de aquella; y que el producto del quadrado de la octava parte de esta suma ò de este resto, por la area de la superficie, y por el peso especifico del agua, hayan de ser las presiones que padezcan ambas caras de la superficie movida; cuya diferencia sería la resistencia à su movimiento.* Añadiendose à las razones hasta aqui expuestas que manifiestan lo infundado de este supuesto, y son, à mi parecer, por sí incontrastables; por una parte las autoridades de autores tan grandes como son un Newton, un Eulero, y otros insignes Mathematicos; y por otra la del constructor sueco Federico Henry de Chapman, quien en su tratado de la construccion del navio, traduccion francesa, cap. IV, § 14 dice expresamente lo propio que yo, y cuyo voto en el particular de ningun modo es despreciable.

107. El segundo principio que usa Don Jorge Juan es pretender que quando es el fluido el que se mueve y no el solido, no es la misma la medida de la resistencia que quando se mueve este y no aquel: apoyando este parecer en que el movimiento del fluido supone desnivelacion ò inclinacion en su superficie, y esta inclinacion una disminucion en la presion sobre ambas caras de una superficie sumergida en èl; suponiendo que esta presion debe ser la correspondiente à la altura del fluido sobre la superficie sumergida, multiplicada por el quadrado

del

del coseno del angulo que forma entonces la superficie del fluido con el horizonte.

Sobre lo qual observaremos en primer lugar, que si se admite desnivelacion en el fluido, por precision ha de haver aceleracion en su movimiento, y que si este se supone constante, solo puede proceder de una desnívelacion anterior: pero sea como fuere, à mi me parece que aun en el caso de admitir la desnivelacion, lo mas que se puede inferir es, que en lugar de sufrir por ella ambas caras de una superficie sumergida una disminucion en la presion que proviene de la altura del fluido, la cara anterior de esta superficie, esto es la que mira hacia el origen de la corriente, por ser, en esta parte, las columnas de fluido que la comprimen cargadas de otras posteriores mas altas que estas, si es que por esto haya alguna mutacion, sufrirá tal vez una presion algo mayor, y la posterior otra algo menor que en el caso de no haver desnivelacion.

108. El ultimo de los tres principios fundamentales, en que establece Don Jorge Juan los cimientos de todo su sistema de Hidraulica, del qual concluye la teoria de la construccion y maniobra del navio, consiste en suponer que debe ser parabolica la figura de la entumecencia que forman los fluidos delante de los cuerpos que moviendose, están en parte fuera y en parte sumergidos en ellos; y parabolico tambien el hueco que, por la misma causa, se forma en la parte posterior de la superficie sumergida.

Pero en este tercer principio, no me parece, haya sido mas feliz Don Jorge Juan que en los otros dos: porque prescindiendo de la razon que nos está diciendo que la elasticidad de que participan todos los cuerpos solidos y aun los fluidos no

airiformes, se opone à la formacion de una figura parabolica, y rechazando aquellos las particulas de estos, dá otra cosa mui distinta, la misma experiencia nos manifiesta que la figura de la entumecencia es enteramente irregular; quando la del hueco en la parte posterior en nada se parece à una parabola; antes tanto por venir el mismo fluido por los costados y por la parte inferior de la superficie sumergida à llenar à este hueco, lo que advierte el mismo D. Jorge Juan; como por razon de la presion atmosferica que omite este autor, nunca se parecerá este hueco à una parabola, ni será, con mucha distancia, tan profundo como lo dan sus formulas.

109. Por todo lo qual, creo que, interin no tengamos otra cosa mejor, lo mas seguro es atenernos à los principios que han establecido los grandes Fisicos è insignes Mathematicos que han manejado hasta aqui el asunto, como son los ya citados de Mairan, Ammontons, Newton, Eulero, y principalmente à lo que resulta de las ultimas experiencias hechas por el Abate Bossut, cuyas obras para mayor instruccion en esta parte deben consultarse.

Ahora con el fin de enseñar el modo de manejar estos mismos principios, pasaremos à su aplicacion à varias questiones utiles en la practica.

RESOLUCION DE ALGUNOS PROBLEMAS sobre el movimiento de los cuerpos en un medio resistente.

PUEDE ser el medio incompresible como son el agua y demas liquidos, ò elastico como es el aire, lo que produce dos teorias cuyos resultados en ocasiones pueden ser mui diversos.

DEL

DEL MOVIMIENTO EN FLUIDOS *incompresibles.*

110. SUPUESTOS los principios que acavamos de ver establece Newton de la resistencia de los fluidos al movimiento de los solidos sumergidos en ellos, sea S la area de una superficie plana que colocada en una situacion horizontal dentro del agua à una profundidad a, se mueve verticalmente de arriba abaxo con una velocidad u, siendo D la densidad del agua, cuyo valor, por usar en todo este tratado de medidas inglesas, es de 57, 75 libras peso de un pie cubico ingles, y con mui corta diferencia 34 pies la altura de la columna de agua que equivale à la presion de la Atmosfera.

PROPOSICION XXXVI.

111. SEGUN el referido sistema, la presion que padecerá la cara anterior de la superficie movida es $(34 + a + \frac{1}{64} uu)$ SD, y la que padecerá la cara posterior de la misma superficie es $(34 + a - \frac{1}{64} uu)$ SD (entiendese por la cara anterior de la superficie movida aquella que mira hacia la direccion del movimiento, y por cara posterior la que mira hacia la parte opuesta); pero es evidente que la resistencia del fluido al movimiento de nuestra superficie es igual à la diferencia de presiones que padecen ambas caras de esta superficie, por donde resulta esta resistencia en el choque directo igual à $\frac{SD\,uu}{32}$.

PRO-

PROPOSICION XXXVII.

SI en lugar de executarse el movimiento en el agua se executara este en otro fluido de mayor ò menor densidad que el agua, en lugar de 34 pies que equivale à la presion atmosferica, se emplearia otra altura, cuyo valor sería à 34, como la densidad D del agua, es à la densidad del nuevo fluido: y si la situacion de la superficie movida fuera vertical ù otra qualquiera que no sea la horizontal; siendo entonces distintas las alturas del agua sobre cada elemento de esta superficie, las presiones que padecerian una y otra cara de esta superficie, solo pudieran hallarse por el calculo integral; pero de qualquier modo que sea, en el choque directo, esto es interin permanezca la direccion del movimiento perpendicular à la situacion de la superficie movida, será siempre la resistencia del agua al movimiento de esta superficie igual à $\frac{SDuu}{32}$.

PROPOSICION XXXVIII.

112. SI el movimiento de la superficie no es perpendicular à la situacion de esta, entonces el choque no se executa en virtud de la velocidad absoluta u del movimiento, sino en virtud de la velocidad relativa que resulta perpendicular à la situacion de la superficie; esto es que si m es el seno del angulo que forma la situacion de la superficie con la direccion de su movimiento, el choque se executa en virtud de la velocidad mu, en cuyo caso la resistencia del fluido al movimiento de esta superficie, en la direccion perpendicular

à la situacion de la misma superficie es $\frac{mmuu\,SD}{32}$, y esta misma resistencia referida à la direccion del movimiento es $\frac{m^3u^2SD}{32}$.

PROPOSICION XXXIX.

113. SUPONGAMOS ahora que el cuerpo movido es un cilindro cuyas bases son perpendiculares à su exe, que la direccion del movimiento de este cilindro y la de su exe son verticales: suponiendo que a es la altura del fluido sobre la base superior de este cilindro, b la longitud de su exe, y S la superficie de ambas bases, será la presion del agua sobre la base inferior de este cilindro igual à $(34 + a + b + \frac{1}{64}uu)\,SD$, y la presion sobre la base superior del mismo igual à $(34 + a - \frac{1}{64}uu)\,SD$, cuya diferencia $(b + \frac{1}{32} \times uu)\,SD$, es la resistencia del fluido al movimiento de este cilindro; pues se sabe que las presiones horizontales que padece la superficie curva de este cilindro no pueden alterar su movimiento vertical, el unico que se le supone; sino es tal vez alguna cosa, por razon de la atraccion mutua de las partes del fluido entre sí y con el cuerpo sumergido en èl.

PROPOSICION XXXX.

114. SI la situacion del exe de este cilindro y la direccion de su movimiento son horizontales, la resistencia del fluido al movimiento

to de este cuerpo será $\frac{1}{32}$ *uu* SD, desvaneciendose la letra *b*, por tener el fluido igual altura sobre dos qualesquiera elementos correspondientes de ambas bases del cilindro movido, y ser estas bases iguales y paralelas entre sí.

PROPOSICION XXXXI.

115. PARA hacer aplicable esta teoria à la resistencia del agua al movimiento de un cuerpo esferico, sea R el radio de esta esfera; imaginando en ella un circulo maximo perpendicular à la direccion de su movimiento, y una rebanada infinitamente delgada paralela à este circulo cuyo radio represento por y y por x su distancia al circulo maximo; forma esta rebanada un cono troncado cuya superficie curva será $Cyds$, ò por ser $ds = \frac{Rdx}{y}$, será esta misma superficie igual à $CRdx$, siendo C la circunferencia de un circulo cuyo radio es 1; pero como esta superficie recibe obliquamente el choque del medio en que camina, siendo $\frac{x}{R}$ el seno de esta inclinacion, y que se busca aqui la resistencia del fluido al movimiento del cuerpo en la direccion de este movimiento, la formula $\frac{1}{32} m^3 u^2 SD$ que expresa la resistencia del fluido al movimiento de una superficie, y en que $S = CRdx$, y $m^3 = \frac{x^3}{R^3}$, se mudará para nuestro cono troncado en $\frac{1}{32} \frac{Cx^3dx}{RR}$, cuya

integral es $\frac{1}{32}$ $Duu \times \frac{Cx^4}{4R^2}$, ò haciendo $x = R$, $\frac{1}{32}$ $Duu \times \frac{1}{4}CRR$, será la resistencia total del fluido al movimiento de nuestra esfera: quando la que padecería un circulo maximo de la misma esfera sería $\frac{1}{32}$ $Duu \times \frac{1}{2}CRR$; por donde se deduce que la resistencia que padece una esfera movida dentro de un fluido solo es la mitad de la que padeceria su circulo maximo en el choque directo y movido con la misma velocidad que la esfera.

116. En esta resolucion hemos prescindido de la diferencia de alturas del fluido sobre las diferentes partes de la superficie de la esfera. Para atender à esta condicion, supondremos en primer lugar que el movimiento se hace en la direccion vertical, en cuyo caso cada rebanada perpendicular à la direccion del movimiento padece de parte del fluido igual presion en todos los elementos de su superficie curva; considerando pues dos rebanadas horizontales à igual distancia del centro de la Esfera, la presion del fluido sobre la superficie curva de la rebanada superior al centro de la esfera, y en la direccion del movimiento será $(34 + a + R - x \mp \frac{mmuu}{64})\, mSD$, el signo $-$ quando es el movimiento de arriba abaxo, y el signo $+$ quando es al contrario, siendo a la altura del fluido sobre la parte superior de la esfera sumergida. Por la misma razon será la presion del fluido sobre la superficie curva de la rebanada inferior al centro de la misma esfera igual à, $(34 + a + R + x \pm \frac{mmuu}{64})\, mSD$, cuya diferencia $(\frac{mmuu}{32} \pm 2x)\, mSD$ será la resistencia

del

del fluido al movimiento de estas dos rebanadas: sustituyendo pues $\frac{x}{R}$ por m, y $CRdx$ por S, è integrando, resulta CRD ($\frac{1}{32} uu \times \frac{x^4}{4R^3} \pm \frac{2x^3}{3R}$), ò sustituyendo R por x, $\frac{1}{32} uu. \frac{1}{4}CRRD \pm \frac{2}{3} CR\overset{3}{D}$ por la resistencia del agua al movimiento vertical de la esfera. Pero $\frac{2}{3} CR^3D$ es el peso del volumen de agua que ocupa la esfera, y $\frac{1}{32} uu \times \frac{1}{4}CRRD$ es como antes la mitad de la resistencia que padeceria el circulo maximo de esta esfera movido en la misma direccion y con la misma velocidad u; resulta pues que la resistencia del agua al movimiento vertical de una esfera es igual à la superficie de su circulo maximo $\frac{1}{2}CRRD$ multiplicada por el peso especifico D de este fluido, y por $\frac{1}{64} uu \pm \frac{4}{3} \times R$; + quando el movimiento es de arriba abaxo y − quando es al contrario.

117. Esto entendido se vé tambien que en las direcciones obliquas, por la uniformidad en la curvatura de la esfera, qualquiera que sea su direccion, la parte $\frac{1}{2}CRR \times \frac{1}{64} uuD$, de la resistencia del agua al movimiento queda siempre la misma; pero que no sucede lo propio à la segunda parte $\frac{2}{3}$ CR^3D de esta misma resistencia, porque obrando esta siempre verticalmente de abaxo arriba, no tiene accion contra el movimiento sino es en quanto su direccion vertical se opone à la de este movimiento; esto es que será esta resistencia igual

al peso absoluto $\frac{2}{3}$ CR^{3}D multiplicado por el seno del angulo que forma la direccion del movimiento con el horizonte, el qual será positivo si el movimiento se inclina debaxo del horizonte, y negativo si al contrario. Haciendo pues este seno igual à n, en qualquiera direccion que execute su movimiento una esfera dentro del agua, será la resistencia de este fluido à su movimiento igual à $\frac{1}{2}$CRR ($\frac{1}{64}$ uu $\pm \frac{4}{3} n$R).

PROPOSICION XXXXII.

118. HEMOS visto que en el movimiento de los solidos en un medio resistente, se aumenta la presion sobre la cara anterior de estos cuerpos, y se disminuye en otro tanto esta presion sobre la cara posterior de estos mismos cuerpos; lo que para la resistencia del medio al movimiento del solido produce una cantidad doble del aumento de presion sobre la cara anterior, ò de la disminucion de la misma presion sobre la cara posterior de este solido: pero aunque el aumento de presion sobre la cara anterior sigue en los fluidos incompresibles la razon del quadrado de la velocidad; el seguir esta misma razon la disminucion de la presion en la cara posterior tiene sus limites; y este limite se verifica quando la velocidad del cuerpo es igual à la que corresponde à la presion atmosferica y altura del fluido sobre el cuerpo; esto es para el agua, quando $u = 8\sqrt{a + 34}$; porque entonces y para mayores velocidades en un cuerpo, la presion sobre la cara posterior es constantemente igual à cero. Quando pues u es igual ò

mayor que $8\sqrt{a + 34}$, en las formulas en que se halla $\frac{1}{32}uu$, se debe sustituir en su lugar $\frac{1}{64}uu + a + 34$. Por exemplo para un cuerpo sumergido en el agua à 15 pies de profundidad, el limite del valor de u, para que se verifique el caso actual es de 56 pies por segundo: si pues à esta profundidad la velocidad de este cuerpo es de 64 pies, la resistencia del fluido à su movimiento será SD (64 + 49) y no 128 SD, como resultaria de la formula $\frac{1}{32}uu$ SD.

119. En la traduccion francesa de los principios de Artilleria de Benjamin Robins comentados por Leonardo Eulero, en una nota de este ultimo autor pag. 360 se lee lo siguiente. *No pudiendo el aire seguir à un cuerpo cuyo movimiento es mui rapido, no se verifica presion alguna sobre la parte posterior de este cuerpo; por donde resulta que no siendo contrarrestada la presion del aire sobre la parte anterior del cuerpo, debe esta presion aumentar la resistencia del fluido al movimiento del solido.* No comprehendo porque dá aqui Eulero esto que realmente sucede en los movimientos rapidos, por una causa del mayor aumento de resistencia del medio; pues es evidente que este aumento de resistencia debe ser mayor quando aumentandose la presion en la cara anterior disminuye en otro tanto esta presion en la cara posterior, que quando en la cara posterior ha llegado la presion à ser igual à cero; porque de alli en adelante el aumento de resistencia solo es igual al aumento de presion sobre la cara anterior del cuerpo.

120. Don Jorge Juan en su exâmen maritimo nota que pasada cierta velocidad, se hace el vacio

en

en la parte posterior del cuerpo movido; pero como prescinde este autor, para los movimientos en el agua, de la presion atmosferica que tiene sobre este efecto un influxo notable, se sigue que en su teoria es demasiado corto el termino de la presion sobre la parte posterior del cuerpo; pues que en ella $u = 8\sqrt{a}$ es lo que se señala para el principio de la formacion del vacio, lo que para el caso de un cuerpo sumergido à 15 pies de profundidad, daria, para el principio de la formacion del vacio en su parte posterior, 31 pies por segundo, en lugar de 56 que hemos hallado; llegando este limite hasta cerca de 400 pies en el aire.

DEL DESCENSO VERTICAL DE LOS graves en un medio incompresible.

PROBLEMA XXVI.

121. DADO el radio de un cuerpo esferico, su peso absoluto, y suponiendo que cae este cuerpo verticalmente dentro del agua, se pregunta qual ha de ser su velocidad quando llegue esta à ser uniforme.

Solucion. Haciendo igual à M el peso absoluto del cuerpo y à S la superficie de su circulo maximo, en cuyo caso, siendo R el radio de este circulo, y C la circunferencia de un circulo qualquiera; es $S = \frac{1}{2}CRR$; M la fuerza absoluta que solicita el cuerpo à que baxe dentro del fluido aumentando à cada instante su velocidad; y $\frac{1}{2}CRRD\,(\frac{1}{64}uu + \frac{4}{3}R)$ la resistencia del fluido à esta solicitud; luego haviendo equilibrio entre estas dos fuerzas, esto es quando sea $M = SD\,(\frac{1}{64}uu + \frac{4}{3}R)$, será uniforme

forme la velocidad u del cuerpo, de donde se saca $uu = \frac{64(M - \frac{4}{3} SDR)}{SD}$: pero $\frac{4}{3}$ SDR es el peso de un volumen de agua igual al del cuerpo, el qual hecho igual à M', será $u = 8\sqrt{\frac{M - M'}{SD}}$, que se reduce à cero quando $M = M$.

Exemplo 1. Sea $M = 300$ libras; $S = 1$ pie quadrado; sabemos que $D = 57,75$ libras; lo que dá $M' = 43,443$, y $u = 16,86$; esto es poco menos de 17 pies por segundo.

Exemplo 2. Sea una bala de cañon de 24 libras de peso, cuyo diametro sea de 0,4536 partes de pie, lo que dá la superficie de su circulo maximo $S = 0,1616$; $SD = 9,3324$; $M' = 2,822$; $M - M' = 21,178$; y $u = 12,05$.

PROBLEMA XXV.

122. SE pregunta en segundo lugar en que tiempo contado desde el principio de la caida dentro del fluido, adquirirá el cuerpo una velocidad dada u.

Solucion. Supuestos los datos anteriores, y que al entrar en el fluido tiene el cuerpo una velocidad V dada en la direccion vertical de su movimiento; la que podrá ser igual à cero si se quiere: es evidente que la diferencial de la velocidad para un instante qualquiera de la caida, es igual à la accion de la pesantez disminuida en razon de la intensidad de los ostaculos que se oponen à su efecto: cuya conseqüencia es que el efecto de la accion de la pesantez dentro del fluido se hallará por la pro-

proporcion siguiente; M (peso absoluto del cuerpo en el vacio), es à $M - M' - \frac{1}{64}$ SD uu (lo que à este cuerpo le queda de peso para baxar dentro del fluido, al tiempo de haver adquirido la velocidad u); como $p = 32$ (accion libre de la pesantez); es à $\frac{64(M - M') - SDuu}{2M}$; accion de la pesantez ò valor de la fuerza aceleratriz que obra dentro del agua sobre el cuerpo, quando ha adquirido este la velocidad u: por donde la equacion $du = pdt$ de los movimientos variados se muda en esta otra $du = dt \times \frac{64(M - M') - SDuu}{2M} = dt \cdot \frac{SD}{2M}$ $\left(\frac{64(M - M')}{SD} - uu\right)$; pero (§ 121) $\frac{64(M - M')}{SD}$ es el quadrado de la velocidad del cuerpo quando ha llegado esta à ser uniforme, la qual hecha $= a$, y separando variables dá $dt = \frac{2M}{SD} \times \frac{du}{aa - uu} = \frac{2M}{SD} \times \frac{1}{2a}\left(\frac{du}{a-u} + \frac{du}{a+u}\right)$; cuya integral es $t = \frac{M}{aSD}$ (Log. $\frac{a+u}{a-u}$ + Log. A). Para hallar el valor de la constante A se reparará que en el principio de la caida dentro del fluido quando $u = V$, es el tiempo de la caida $t = o$, lo que dá Log. A $=$ $-$ Log. $\frac{a+V}{a-V}$, y por consiguiente $t = \frac{M}{aSD}$ Log. $\frac{(a+u)(a-V)}{(a-u)(a+V)}$, que se reduce à $t = \frac{M}{aSD}$ Log. $\frac{a+u}{a-u}$, quando $V = o$, esto es quando empieza el cuerpo à caer dentro del fluido desde el reposo: siendo $t = \infty$ quando ha llegado à ser $u = a$; lo

que

que significa que el movimiento del cuerpo no llegará al punto de la uniformidad, sino es despues de un tiempo infinito.

Exemplo 1. Supuesto que con los datos anteriores, quando ha llegado la velocidad à ser uniforme, es esta para la bala ò bomba de 300 libras, igual à 16,86 pies, y que esta bala al entrar en el fluido tiene una velocidad $V = 4$; se pregunta quanto tiempo empleará en alcanzar la de 16,8 pies por segundo, que solo difiere de la uniforme en 0,06 de pie. De estos datos resulta $V = 4$; $u = 16,8$; $a = 16,86$; $t = \frac{300}{16,86 \times 57,75} \times$ Log. $\frac{3366 \times 1286}{6 \times 2086} = 0,30811 \times$ Log. $345,852 = 0,30811 \times 5,846 = 1'',8$; poco menor de $2''$. (a)

Exemplo 2. Del mismo modo para hallar el tiempo que emplearia una bala de 24 en alcanzar la velocidad de 12 pies por segundo, que solo difiere en 0, 05 de la velocidad uniforme que le corresponde, tendremos $t = \frac{24}{12.05 \times 9\,3324}$ Log. $\frac{2405}{5} = 0,21342$. Log. $481 = 0,21342 \times 6,17586 = 1'',318$. esto es que el tiempo necesario para alcan-

(a) Para hallar los logarithmos hiperbolicos de las cantidades se pueden usar dos medios; el uno se funda en que segun la teoria de los logarithmos dado el hiperbolico de una quantidad m, es el de otra $m + n$, poco mayor que m, igual à Log. hip. $m + \frac{2n}{2m + n}$. El otro metodo consiste en que Log. comun del Log. hip. de una quantidad es igual al Log. com. del Log. com. de esta quantidad menos el numero constante 9,6377843, Log. com. del modulo de los logarithmos; ò mas 0,3622157 complemento arithmetico de este numero constante.

alcanzar la velocidad de 12 pies por segundo, no llega en este exemplo à un segundo y medio.

123. *Corolario.* Por estos dos exemplos se vé que, sin embargo de necesitarse un tiempo infinito para llegar un cuerpo al punto fixo de su velocidad uniforme, mui en breve se aproxima este cuerpo à esta misma velocidad à lo menos en el agua, hasta no diferir de ella sino es de una cantidad insensible.

PROBLEMA XXVI.

124. SUponiendo que la esfera entra en el fluido con una velocidad primitiva dada V, y que su movimiento es vertical, se pregunta que espacio deberá correr esta Esfera, para llegar à tener otra velocidad u dada.

Solucion. En esta qüestion, siendo siempre a la velocidad del cuerpo quando ha llegado esta à ser uniforme, es $u < V$, quando es, $V > a$; y al contrario es $u > V$, quando es $V < a$. Sea e el espacio buscado; la equacion de los movimientos variados q̃ combiene à este caso es $de = udt$, pero por el problema anterior es $dt = \frac{2M}{SD} \times \frac{du}{aa-uu}$; sustituyendo resulta $de = \frac{2M}{SD} \times \frac{udu}{aa-uu}$; cuya integral $e = \frac{M}{SD}$ (Log. A − Log. $(aa-uu)$).... debe ser igual à cero quando $u = V$; lo que dá $e = \frac{M}{SD}$ Log. $\frac{aa-VV}{aa-uu} = \frac{M}{SD}$ Log. $\frac{aa}{aa-uu}$, quando $V = o$.

125. *Corolario* 1. Si se pide el valor de u expresado en t, esto es la velocidad que adquiere el cuerpo en el tiempo t; de la equacion $t = \frac{M}{aSD} \times$

Log.

Log. $\frac{(a+v)(a-V)}{(a-u)(a+V)}$; siendo c el numero cuyo logarithmo es 1, se saca $c^{\frac{aSDt}{M}} = \frac{(a+u)(a-V)}{(a-u)(a+V)}$; ò haciendo $c^{\frac{aSDt}{M}} = bb$; resulta $u = a \times \ldots\ldots$ $\frac{(a+V)bb-(a-V)}{(a+V)bb+(a-V)} = a.\frac{bb-1}{bb+1}$, quando $V = o$.

126. *Corolario* 2. Si se pide el valor de e en t, del valor de u que acabamos de hallar se saca $aa - uu = aa \times \frac{4bb(aa-VV)}{((a+V)b^2+(a-V))^2}$; sustituyendo en la equacion $e = \frac{M}{SD}$ Log. $\frac{aa-VV}{aa-uu}$; resulta $e = \frac{2M}{SD}$ Log. $\frac{(a+V)bb+(a-V)}{2ab} = \frac{2M}{SD}$Log.$\frac{bb+1}{2b}$ quando $V = o$.

127. *Corolario* 3. Dado el espacio corrido por el cuerpo, se pregunta qual será su velocidad al fin de este espacio; à cuyo fin la equacion $e = \frac{M}{SD}$ Log. $\frac{aa-VV}{aa-uu}$, da, $c^{\frac{SDe}{M}} = \frac{aa-VV}{aa-uu}$, que represento por mm, y dá $u = \sqrt{\frac{aa(mm-1)+VV}{mm}} = a\sqrt{\frac{mm-1}{mm}}$; quando $V = o$.

128. *Corolario* 4. Dado el espacio corrido, se pide el tiempo empleado en correrlo: para esto tomo la equacion $e = \frac{2M}{SD}$ Log. $\frac{(a+V)bb+a-V}{2ab}$, del (§ 126); multiplico el primer miembro por Log. c, resulta $c^{\frac{SDe}{2M}} = m = \frac{(a+V)bb+a-V}{2ab}$;

de donde se saca $b = \frac{am \pm \sqrt{aamm + VV - aa}}{V + a}$;
$\frac{aSDt}{2M}$

pero (§ 125) $b = c^{\frac{aSDt}{2M}}$; sustituyendo pues, pasando à logarithmos, y quitando la expresion Log. $c = 1$, resulta $t = \frac{2M}{aSD}$ Log. . . . .
$\frac{am \pm \sqrt{aa(mm-1) + VV}}{a + V} = \frac{2M}{aSD}$ Log. . . . .
$(m \pm \sqrt{mm - 1})$ quando $V = o$.

Con la resolucion de estos dos problemas y sus corolarios, en la caída libre por un medio resistente è incompresible, dada una de estas tres cosas; el espacio corrido por un cuerpo esferico dado; el tiempo empleado en correr este espacio; y la velocidad adquirida al fin de este tiempo, se sabrán encontrar las otras dos: veamos ahora como se resuelve la misma qüestion en el ascenso vertical de los graves.

DEL ASCENSO VERTICAL DE LOS GRAVES en un medio incompresible.

PROBLEMA XXVII.

129. EN el ascenso vertical de los graves, siendo V la velocidad primitiva de una Esfera dada, se pide el tiempo que empleará esta esfera en quedar en otra velocidad u dada.

Solucion. En el descenso vertical, hallamos (§ 122) que la accion de la pesantez que obra en una esfera es $\frac{64(M - \overset{\prime}{M}) - SDuu}{2M}$ en que el termino SDuu es negativo, porque en este caso se opone la

resistencia del fluido à la accion de la gravedad: pero en el ascenso en lugar de oponerse esta resistencia à la misma accion, contribuye con ella à disminuir la velocidad del cuerpo en su ascenso, y es ademas negativa la diferencial de la velocidad respecto à la diferencial del tiempo, lo que dá esta equacion $-du = dt \times \frac{64(M-M') + SDuu}{2M}$, ò, haciendo como antes $\frac{64(M-M')}{SD} = aa$; $-du = dt \times \frac{SD}{2M}(aa+uu)$ ò $\frac{M}{32(M-M')} \times -\frac{aadu}{aa+uu} = dt$; pero la integral de $\frac{aadu}{aa+uu}$, es un arco de circulo cuyo radio es a, y cuya tangente es u, siendo esta integral igual à cero quando $u = V$; integrando pues y completando resulta $t = \frac{M}{32(M-M')}$ (arco tang. V — arco tang. u); ò para que pertenezcan estos arcos à un circulo cuyo radio sea 1, $t = \frac{aM}{32(M-M')}$ (arco tang. $\frac{V}{a}$ — arco tang. $\frac{u}{a}$) $= \frac{aM}{32(M-M')} \times$ arco tang. $\frac{V}{a}$, quando llega el cuerpo hasta el reposo.

130. *Corolario.* Para hallar la inversa de esta qüestion, esto es dado el tiempo del ascenso, hallar la velocidad que le corresponde, la equacion anterior dá, arco tang. $\frac{u}{a} =$ arco tang. $\frac{V}{a} - \frac{32t(M-M')}{aM}$, de donde resulta la longitud del arco cuya tangente es $\frac{u}{a}$, reduciendo pues este arco à

grados, tomando su tangente, y multiplicandola por a, el producto será el valor de u buscado.

Observese que nunca debe resultar el valor de u negativo, porque llegando u à mudar de signo, pertenece la question à la caida de los graves, cuya solucion hemos visto ser mui distinta de la del ascenso.

PROBLEMA XXVIII.

131. HALLAR el espacio que debe correr el cuerpo para adquirir la velocidad u dada.

Solucion. En la formula $de = udt$, sustituyendo por dt su valor $\frac{aaM}{32(M-M')} \times \frac{du}{aa+uu}$, sacado de la proposicion anterior; resulta $de = \frac{aaM}{64(M-M')} \times \frac{2udu}{aa+uu}$, cuya integral es $\frac{aaM}{64(M-M')}$ Log. $\frac{aa+VV}{aa+uu} = e = \frac{M}{SD}$ Log. $\frac{aa+VV}{aa}$, quando $u = o$.

132. *Corolario 1.* De la equacion $e = \frac{M}{SD} \times$ Log. $\frac{aa+VV}{aa+uu}$, haciendo $c^{\frac{SDe}{2M}} = m$ se saca $u = \frac{1}{m}\sqrt{aa(1-mm)+VV}$, y es la velocidad que le queda al cuerpo haviendo ascendido hasta la altura e.

133. *Corolario 2.* Dado el tiempo del ascenso, por el § 130, se hallará la velocidad que corresponde a este tiempo, y por el § 131, con esta velocidad se hallará la altura à que ascenderá el cuerpo en el tiempo dado.

Coro-

134. *Corolario* 3. Reciprocamente dada la altura vertical à que asciende un cuerpo esferico dado arrojado con una velocidad primitiva dada, por el § 132, se hallará la velocidad que corresponde à esta altura, y por el § 129, con esta velocidad se hallará el tiempo empleado en ascender à esta altura.

DEL MOVIMIENTO EN FLUIDOS elasticos.

135. DOS causas contribuyen à hacer la resistencia de los fluidos elasticos al movimiento de los solidos, mayor que la de los fluidos incompresibles; la primera está en el mismo resorte de las partes integrantes de estos fluidos; pues así como en las leyes de la colision de los cuerpos elasticos hemos visto que por el efecto de la fuerza de restitucion, pierde el cuerpo chocante otra tanta cantidad de movimiento, como ha perdido por el choque sin atender à esta fuerza de restitucion efecto del resorte; del mismo modo en los fluidos elasticos debe perder un cuerpo chocante, por razon de la elasticidad de estos, una cantidad de movimiento doble de la que perdiera si el fluido fuera incompresible; cuya conseqüencia es que, solo por razon de la elasticidad, en las formulas de los problemas anteriores donde hai uu para expresar la resistencia del fluido, es necesario sustituir $2uu$.

136. La segunda causa del aumento de esta resistencia está en la densidad del aire que varia, tomando incremento al paso que aumenta la velocidad del cuerpo chocante, ò la respectiva de entrambos, en tal conformidad que en las velocidades mui rapidas, como la de 1600 pies por segundo,

gundo, afirman algunos que se hace esta densidad mucho mayor que en los movimientos lentos en que es este aumento insensible.

Pero à mas de que debe variar la ley de esta densidad no solo con relacion à la velocidad, sino tambien con relacion à la figura del cuerpo chocante; pudiendo suceder mui bien que, por razon de esta figura, sea la que fuere la velocidad, quede la densidad poco menos que constante; esta materia tratada en primer lugar por *Benjamin Robins*, comentada despues por el celebre *Leonardo Eulero*, è ilustrada con notas por su traductor frances Mr. Lombard, queda sin embargo aun tan llena de espinas, por la dificultad de conseguir experimentos que dén con alguna seguridad, para una figura dada, la ley de la variacion en la densidad, y ademas tan cargada de calculos prolixos que he creido fuera de su lugar incluirla con la extension que seria necesaria para su comprehension, en una obra como esta que no debe ser mas que elemental: sin embargo, haviendo tratado en esta misma obra la teoria de los tiros por elevacion en el vacio, era necesario dar à conocer quanto se desvia esta teoria de la verdad en lo real y practico; à cuyo fin prescindiendo en primer lugar de la variacion en la densidad del medio, de cuya consideracion dimana toda la dificultad, solo atendemos à la resistencia del medio elastico, como si fuera su densidad uniforme: despues por via de apendice apuntaremos un modo de atender à esta variacion en la densidad.

137. En el primer supuesto que simplifica considerablemente la question y tal vez no se aparta de la verdad tanto quanto se pudiera pensar, à lo menos para los principales casos que nos hemos propuesto exâminar; la unica mutacion que hai

que

que hacer es poner $2uu$ en lugar de uu en las formulas diferenciales que expresan la resistencia de los fluidos incompresibles; è integrando se conseguirán los efectos de esta resistencia en los fluidos elasticos.

DEL DESCENSO VERTICAL DE LOS GRAves *en un medio elastico.*

PROBLEMA XXIX.

138. DADO el radio de una esfera, su peso absoluto, y suponiendo que cae verticalmente en el aire, se pregunta qual ha de ser su velocidad quando llegue esta à ser uniforme.

Solucion. Segun el § 121, la formula que corresponde à este caso es en los fluidos incompresibles $uu = \frac{64\,(M - M')}{SD}$; será pues para los fluidos elasticos $uu = \frac{32\,(M - M')}{SD}$.

Aplicacion. Supongamos una bala de 24 libras de peso, cuyo diametro sea de 0,4536 partes de pie, lo que dá la superficie de su circulo maximo $S = 0{,}1616$; $M = 24$, y como en el aire es $D = \frac{57{\cdot}75}{850}$, es $SD = 0{,}0109793$, y $M' = 0{,}0269$; de donde $\frac{32M}{SD} = 69949{,}8$, cuya raiz quadrada valor de u dá $u = 264{,}48$ pies por segundo.

139. En este exemplo y en los que se siguen despreciaremos M' como de poco valor respecto à M, pues que si se atiende à lo que el aire disminuye el peso de una bala de 24, se verá que la velocidad

locidad uniforme que resulta en este caso, solo difiere de la hallada en $\frac{15}{100}$ de pie por segundo.

140. Si se huviera atendido à la variacion en la densidad del aire, suponiendo por exemplo, que à esta misma velocidad de 264 pies por segundo le corresponde una densidad doble de la que tiene en su estado natural, huviera resultado por las formulas que se hallarán en el § 160 que la velocidad uniforme de nuestra bala no huviera pasado de 200 pies por segundo.

PROBLEMA XXX.

141. SIENDO V la velocidad que tiene un cuerpo esferico, cuyo movimiento se executa de la direccion vertical de arriva abaxo, al tiempo de empezar à caer libremente en un medio resistente y elastico; hallar el tiempo que empleará en adquirir ò quedar en una velocidad u dada.

Solucion. Hemos visto § 122 que para la caída libre en los fluidos incompresibles, la formula que corresponde es $M d\dot{u} = 32 dt \times (M - M' - \frac{1}{64} SD\, uu)$ luego para el movimiento en un fluido elastico, es $\frac{M du}{SD} = \left(\frac{32M}{SD} - uu\right) dt$, ò haciendo $\frac{32M}{SD} = aa$; $\frac{M}{SD} \times \frac{du}{aa - uu} = dt$; ò $\frac{1}{32}\, aa \times \frac{d\dot{u}}{aa - uu} = dt$, cuya integral dá $t = \frac{1}{64}\, a \text{ Log. } \frac{(a+u)\,(a-V)}{(a-u)\,(a+V)} = \frac{1}{64}\, a \times$ Log. $\frac{a+u}{a-u}$, quando $V = o$.

142. *Corolario* 1. Siendo a el valor de la velocidad del cuerpo quando ha llegado esta à ser uniforme;

forme; puede ser $V >$ ò $< a$: si es $V > a$, tambien será $> u$, y la velocidad del cuerpo irá menguando hasta igualarse con a; pero si es $V < a$ tambien será $< u$, y la velocidad del cuerpo irá creciendo hasta igualarse con la uniforme a; resultando en ambos casos $t = \infty$, quando ha llegado à ser $u = a$.

143. *Corolario 2.* De este ultimo valor de t, haciendo $c^{\frac{2aSDt}{M}} = c^{\frac{64t}{a}} = bb$, se saca como en el § 125, $u = a \, \frac{(a + V)\, bb - (a - V)}{(a + V)\, bb + (a - V)} = a \, \frac{bb - 1}{bb + 1}$ quando $V = o$.

Aplicacion. Supuesto que con los datos anteriores quando ha llegado la velocidad à ser uniforme, es esta igual à 264,48; se pregunta quanto tiempo empleará nuestra esfera en pasar de una velocidad primitiva de 4 pies, à la de 264 pies.

En la formula $t = \frac{a}{64}$ Log. $\frac{(a + u)\,(a - V)}{(a - u)\,(a + V)}$, de este mismo problema es, $a = 264{,}48$; $u = 264$; $V = 4$; $\frac{a}{64} = 4{,}1325$; $\frac{(a + u)\,(u - V)}{(a - u)\,(a + V)} = \ldots$ 1065,73, cuyo logarithmo hiperbolico es 6,9714152, y dá $t = 28'',809$.

La prueva de esta aplicacion está en la question inversa en que (§ 143) $u = a \, \frac{(a + V)\, bb - (a - V)}{(a + V)\, bb + (a - V)}$ $bb = c^{\frac{64t}{a}} = 1065{,}73$; $a = 264{,}48$; y dá como antes, $u = 264$.

PRO-

PROBLEMA XXXI.

144. SUponiendo que la esfera empieza à baxar verticalmente con una velocidad primitiva V dada, se pregunta que espacio deberá correr esta esfera para llegar à tener otra velocidad u dada tambien.

Solucion. Siendo siempre a la velocidad del cuerpo quando ha llegado esta à ser uniforme; sea e el espacio buscado; en la equacion $de = udt$; sustituyendo por dt, su valor $\frac{aa}{32} \times \frac{du}{aa - uu}$, (§141) resulta $de = \frac{aa}{32} \times \frac{udu}{aa - uu}$; cuya integral es $e = \frac{aa}{64}$ Log. $\frac{aa - VV}{aa - uu} = \frac{aa}{64}$ Log. $\frac{aa}{aa - uu}$ quando $V = o$.

145. *Corolario* 1. Si se pide el valor de e expresado en t; esto es si se pregunta que espacio correrá el cuerpo en un tiempo dado t: de la equacion $u = a \times \frac{(a+V)\,bb - (a-V)}{(a+V)\,bb + (a-V)}$ del § 143, se saca, $aa - uu = \frac{4aabb\,(aa - VV)}{((a+V)\,bb + (a-V))^2}$; sustituyendo en $e = \frac{aa}{64}$ Log. $\frac{aa - VV}{aa - uu}$, resulta $e = \frac{aa}{32}$ Log. $\frac{(a+V)\,bb + a - V}{2ab} = \frac{aa}{32}$ Log. $\frac{bb+1}{2b}$ quando $V = o$.

146. *Corolario* 2. Si se pide el valor de la velocidad adquirida despues de haver corrido el cuerpo un espacio dado e; con solo hacer $c^{\frac{64e}{aa}} = mm$; la equacion $e = \frac{aa}{64}$ Log. $\frac{aa - VV}{aa - uu}$ del § 144, se transformará en $\frac{aa - VV}{aa - uu} = mm$, de donde resulta

$u = \frac{1}{m} \sqrt{aa\,(mm-1) + VV} = \frac{a}{m} \sqrt{mm-1}$, quando $V = o$.

147. *Corolario 3.* Para hallar el tiempo empleado en correr un espacio dado, tomo la equacion $e = \frac{aa}{32}$ Log. $\frac{(a+V)\,bb + a - V}{2ab}$, del §145; haciendo despues las mismas operaciones que en el § 128, resulta en primer lugar $c^{\frac{SDe}{M}} = c^{\frac{32e}{aa}} = m = \frac{(a+V)\,bb + a - V}{2ab}$; despues $b = \ldots\ldots$ $\frac{am \pm \sqrt{aa\,(mm-1) + VV}}{c^{\frac{32t}{a}}\; a + V}$, pero $bb = c^{\frac{64t}{a}}$, ò $b = c^{\frac{32t}{a}}$, sustituyendo, pasando à logarithmos, y quitando la expresion Log. c por ser igual à 1, resulta $t = \frac{a}{32}$ Log. $\frac{am \pm \sqrt{aa\,(mm-1) + VV}}{a+V}$ $= \frac{a}{32}$ Log. $(m \pm \sqrt{mm-1})$, quando $V = o$.

Esto es en quanto al descenso. Pasemos ahora

AL ASCENSO VERTICAL DE LOS GRAVES en un medio elastico.

148. PARA resolver las qüestiones relativas à este asunto, se debe reparar que si en el descenso en el aire se puede despreciar M' sin error sensible, con mas razon se le podrá despreciar en el ascenso, y será tanto menor el pequeño error que de allí resulte, quanto mas rapido sea el movimiento. Además en lugar de oponerse la resistencia del fluido à la accion de la pesantez, como en

en el descenso, ambas fuerzas concurren en el ascenso para disminuir la velocidad primitiva con que se ha arrojado el cuerpo: cuya conseqüencia es que, con quitar M', y mudar uu en $2uu$ en las formulas diferenciales del ascenso en los fluidos incompresibles, se tendrán las correspondientes à los fluidos elasticos.

149. *Corolario* 1. Para hallar el tiempo necesario para quedar el cuerpo en una velocidad u dada, siendo V la primitiva, en lugar de la formula, $du = -dt \times \frac{64(M - M') + SDuu}{2M}$, del § 129, se escribirá $-Mdu = dt\ (32M + SDuu)$ ò haciendo $\frac{32M}{SD} = aa$; $dt = \frac{1}{32} \times -\frac{aadu}{aa + uu}$, cuya integral dá $t = \frac{a}{32}$ (arco tang. $\frac{V}{a}$ — arco tang. $\frac{u}{a}$) $= \frac{a}{32}$ arco tang. $\frac{V}{a}$, quando ha llegado el cuerpo hasta el reposo.

150. *Corolario* 2. La qüestion inversa que consiste en hallar la velocidad que queda al cuerpo despues de haver ascendido por un espacio t de tiempo dado, se resuelve del mismo modo que en el § 130.

151. *Corolario* 3. En el § 131, para hallar el espacio que debe correr el cuerpo para quedar en una velocidad u dada, la formula es $e = \frac{M}{SD}$ Log. $\frac{aa + VV}{aa + uu}$, en que $aa = \frac{64(M - M')}{SD}$; pero en los fluidos elasticos es $aa = \frac{32M}{SD}$, por hacerse $M' = o$, y SD $=$ 2SD, lo que dá $e = \frac{M}{2SD} \times$ Log. $\frac{aa + VV}{aa + uu}$

=

$= \frac{aa}{64}$ Log. $\frac{aa + VV}{aa + uu} = \frac{aa}{64}$ Log. $\frac{aa + VV}{aa}$, quando ha llegado el cuerpo hasta el reposo.

152. *Aplicacion.* Sea $V = 1600$; $SD = 0,0109793$; $M = 24$; lo que dá $aa = 69949,8$; $a = 264,48$; $\frac{aa}{64} = 1092,966$; $\frac{aa + VV}{aa} = \ldots$ $37,5968$, cuyo logarithmo hiperbolico es, $3,6269189$; de donde resulta $e = 3964,12$ pies.

Del mismo modo se hallará $t = \frac{a}{32}$ arco tang. $\frac{V}{a}$ $= 8,265$. arco tang. $6,0496 = 8,265$. arco 80 gr. 36 min. 50 seg. $= 8,265 . 1,407 = 11,6287$ seg.; tiempo empleado en el ascenso de 3964,12 pies empezando con una velocidad de 1600 pies, y acabando en el reposo.

Para hallar la velocidad que adquirirá el mismo cuerpo al fin de su caída por la misma altura de 3964,12 pies, se usará la formula del § 146, $u = \frac{a}{m} \sqrt{mm - 1}$, en que $mm = 37,5968$, y $a = 264,48$; lo que dá $u = 260,94$.

En quanto al tiempo que empleará el mismo cuerpo en baxar verticalmente de la misma altura de 3964,12 pies, se podrá hallar por la formula del § 141, $t = \frac{a}{64}$ Log. $\frac{a + u}{a - u}$; ò por la del § 148, $t = \frac{a}{32} \times$ Log. $(m \pm \sqrt{mm - 1})$; ambas dan igualmente este tiempo, $t = 20,66$ seg.

DEL MOVIMIENTO OBLIQUO DE LOS GRAves en un medio elastico.

153. PARA juzgar ahora con corta diferencia, de la figura de la curva que des-

describen los proyectiles en un medio resistente, arrojados en una direccion obliqua, con una velocidad inicial dada; descompongo esta velocidad en dos, una vertical, y otra horizontal: con la velocidad vertical calcúlo con nuestras formulas la altura à que ascenderá el cuerpo, y el tiempo que empleará en ascender à esta altura, como tambien el tiempo que empleará en baxar de la misma altura: representando por t y $\overset{\prime}{t}$ estos dos tiempos, calcúlo los espacios que deberá correr el cuerpo en la direccion horizontal, con la parte horizontal de su velocidad absoluta, en los tiempos t, y $t + \overset{\prime}{t}$; el primer espacio será con corta diferencia el que corresponda al tiempo t que empleare el cuerpo en ascender hasta el vertice de su curva, y el segundo $t + \overset{\prime}{t}$, el alcance total de la bala.

Exemplo 1. Con los datos que hemos usado hasta aqui, supongamos que la inclinacion del tiro es de 45 gr., lo que dará las velocidades vertical y horizontal, iguales à $\frac{1}{2}V\sqrt{2}$.

Para conocer la altura à que ascenderá nuestra bala con la velocidad inicial $\frac{1}{2}V\sqrt{2}$, tomo la equacion del § 151, $e = \frac{aa}{64}$ Log. $\frac{aa + VV}{2aa}$, en que por VV pongo $\frac{1}{2}VV$, siendo $V = 1600$ pies, y resulta $e = 3227,84$ pies.

Despues con la equacion $t = \frac{a}{32}$ arco tang. $\frac{V}{a}$ de § 149, resulta $t = \frac{a}{32}$ arco 76 gr. 50 min. 32 seg. $= 11,0846$ seg.

Con la equacion $u = a\sqrt{\frac{mm - 1}{mm}}$ en que (§ 146) $mm = c^{\frac{64e}{aa}} = 19,1718$; se saca la velo-

cidad al fin de la caída por los 3228 pies, $u = 257{,}49$.

En fin con la equacion $t = \frac{a}{64}$ Log. $\frac{a+u}{a-u}$ del § 141, y con el ultimo valor de u hallado, resulta $\overset{,}{t} = 17{,}324$; lo que dá $t + \overset{,}{t} = 28{,}9086$.

154. Resta pues saber que espacio correrá el cuerpo horizontalmente en virtud de la velocidad $\frac{1}{2}V\sqrt{2} = 1131{,}37$ pies, en el tiempo de 11,085 seg.; y en el de 28,9086 seg.: pero como la pesantez no tiene accion alguna para aumentar ni disminuir la velocidad de un cuerpo en una direccion horizontal; se sigue que en esta direccion será la diferencial de la cantidad de movimiento perdida por el cuerpo, igual à Mdu, proporcional à la intensidad de la resistencia del fluido $SDuu$, multiplicada por la diferencial dt del tiempo, lo que, por ser negativa la diferencial de la velocidad respecto à la direccion de esta velocidad, dá esta equacion $-du = \frac{SDuudt}{PM}$, en que P es una constante que se trata de determinar.

En el ascenso y descenso vertical de los graves, en que la accion de la gravedad obra con toda su energia, es $P = 32$, lo que aqui no puede ser como se vé y ademas lo convence la experiencia: con efecto si usáramos para la direccion horizontal este mismo valor de P, resultarian por los metodos que vamos à ver, los espacios corridos al fin de los tiempos 11,0846 seg., y 28,9026 seg. iguales à 11535 y 26833 pies; y las velocidades que conservaria el cuerpo despues de haver corrido estos espacios, 959,71; y 770,91 pies: pero si debemos conformarnos con las conseqüencias que de sus experimentos saca Benjamin Robins, las mismas

mas que admitió el celebre Eulero ; por las quales resulta que una bala de 24 arrojada horizontalmente con una velocidad de 1600 pies, despues de haver corrido un espacio de 4200 pies, solo debe conservar 627 pies de velocidad ; es evidente que las cantidades que acabamos de hallar son crecidas, y por consiguiente que P = 32 es demasiado grande.

Para hallar el valor de P que corresponde al sistema del Señor Robins, tomo la equacion $-du = \frac{SDu^{n} dt}{PM}$, en que para generalizar mas en lugar de hacer la resistencia del fluido proporcional al quadrado de la velocidad, la supongo proporcional à una potencia qualquiera *n* de esta misma velocidad: integrando pues y completando resulta, $u = V$

$$\left(\frac{PM}{PM + (n-1)\, SDtV^{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \frac{PMV}{PM + SDVt},$$

quando $n = 2$.

Si despues en la equacion $de = udt$, se sustituye en primer lugar por *u* el valor general que acabamos de hallar ; resulta $de = V \times \ldots\ldots\ldots$

$$\left(\frac{PM}{PM + (n-1)\, SDtV^{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}} dt$$

; en que haciendo $\frac{PM}{(n-1)\, SDV^{n-1}} = h$, resulta la integral completa $e = \frac{n-1}{n-2}\left(h^{\frac{1}{n-2}} \times (h+t)^{\frac{n-2}{n-1}} - h\right)$.

Si en la misma equacion $de = udt$, se sustituye en segundo lugar por dt su valor $-\frac{PM}{SD} \times \frac{du}{u^n}$; resulta $e = \frac{PM}{SD} \left(\frac{V^{n-2} - u^{n-2}}{(Vu)^{n-2}} \right)$.

Pero en estas dos ultimas equaciones resulta $e = \frac{0}{0}$, quando $n = 2$; para hallar el valor de e en este ultimo caso, vuelvo à tomar las equaciones diferenciales que contienen el espacio, empleando el exponente 2 en lugar del general n; integrando y completando las integrales, resulta $e = hV$ Log. $\frac{h+t}{h} = \frac{PM}{SD}$ Log. $\frac{PM + SDVt}{PM}$; ò $e = \frac{PM}{SD} \times$ Log. $\frac{V}{u}$.

155. De esta ultima equacion se saca $P = \frac{SDe}{M \text{ Log. } \frac{V}{u}}$; para cuya valuacion repararemos que el logarithmo hiperbolico de qualquiera cantidad es igual al logarithmo comun de esta misma cantidad, multiplicado por el numero constante 2,30258509, lo que dà el logarithmo comun del logarithmo hiperbolico de una cantidad igual al logarithmo comun del logarithmo comun de esta cantidad, mas el logarithmo comun de la constante 2,30258509: con que será Log. P = Log. SDe — Log. M — LL $\frac{V}{u}$ — Log. 2,30258509; en que SD = 0,0109793, su Log. = 8,0405747; e = 4200, su Log. = 3,6232493; M = 24, su Log. = 1,3802112; $\frac{V}{u} = \frac{1600}{627}$, su log. = 0,4068525,

y

y su L. L. $=$ 9,6094370; en fin Log. 2,30258509 $=$ 0,3622159; lo que dá P $=$ 2,05097, su Log. $=$ 0,3119599.

Hallado así el valor del coeficiente P, correspondiente à los experimentos referidos en la citada obra de Benjamin Robins, vuelvo à las equaciones $e = \frac{PM}{SD}$ Log. $\frac{PM + SDVt}{PM}$, y $u = \frac{PMV}{PM + SDVt}$, en que V $=$ 1131,37 pies, y $t =$ en primer lugar, 11,0846 seg., y en segundo lugar $=$ 28,9086 seg. lo que dá el espacio corrido en los 11,0846 seg. igual à 5981,93 pies, el corrido en los 28,9086 seg. igual à 9485,17 pies, y las velocidades que quedan al cabo de estos mismos tiempos iguales à 297, 95; y à 136,389 pies por segundo.

Si se huviera hecho P $=$ 1, como parece sería natural en vista de que para el movimiento horizontal nada influye la accion de la pesantez, resultaria que en los 11,0846 seg., el espacio que corriera el cuerpo sería de 4170 pies, y la velocidad que tuviera à esta epoca, la de 167,933 pies: en los 28,9086 seg., el espacio corrido sería 6055,5, quedandole al cuerpo la velocidad de solos 70, 8784 pies; todos valores demasiado cortos.

156. Dice Eulero en una de sus notas à la citada obra, que una bala siendo arrojada baxo un angulo de 75 gr., se havia experimentado que su alcance havia sido poco mas de los dos tercios del que tuvo arrojada con la misma fuerza baxo un angulo de 15 gr. complemento del de 75, quando en el vacio ambas amplitudes de alcances debian ser las mismas; lo propio dan nuestras formulas.

Exemplo 2. Supongase una bala de cañon de 24 libras de peso, cuyas dimensiones sean las mismas que hasta aqui hemos admitido, y arrojada con una velocidad inicial de 1600 pies por segun-

do, en primer lugar baxo una inclinacion de 75 gr. y en segundo lugar baxo la de 15 gr.; lo que para el primer caso dá una velocidad inicial vertical de 1545,48 pies, y una horizontal de 414,11 pies, y para el segundo caso la velocidad inicial vertical de 414,11, y la horizontal de 1545,48 pies, cabalmente el inverso del caso anterior.

Con las velocidades verticales, y con las formulas $e = \frac{aa}{64}$ Log. $\frac{aa + VV}{aa}$, en que $aa = 69949,8$, calcúlo la altura à que ascenderá nuestra bala, y hallo que para la inclinacion de 75 gr. es esta altura $e = 3890,43$, y para la de 15 gr., es $e = 1354$ pies

Con la formula $t = \frac{a}{32}$ arco tang. $\frac{V}{a}$, calcúlo el tiempo que emplea la bala en ascender à estas dos alturas halladas, cada una con la velocidad que le pertenece; y hallo que para el angulo de 75 gr. es este tiempo, $t = 11,5816$ seg., y para la inclinacion de 15 gr., es $t = 8,285$ seg.

Con la formula $u = \frac{a}{m} \sqrt{mm - 1}$, en que $mm = c^{\frac{64e}{aa}}$, calcúlo la velocidad que deberá adquirir la bala cayendo libre y verticalmente de las dos alturas halladas en el modo siguiente: tomo el logarithmo comun de $\frac{64e}{aa}$, de este logarithmo resto el logarithmo constante 0,3622159, la diferencia es el logarithmo del logarithmo de m; el numero que en las tablas corresponde à este logarithmo de logarithmo es el logarithmo comun de mm, y el numero que en las tablas corresponde à este logarithmo comun es el valor de mm; lo que dá para el angulo de 75 gr., $u = 260,69$ pies, y para el de 15 gr. $u = 222,895$. Con

Con la formula $t = \frac{a}{64}$ Log. $\frac{a+u}{a-u}$, calcúlo el tiempo que emplearia la bala en caer verticalmente de las dos alturas halladas, y resulta para la inclinacion de 75 gr., $t = 20,379$ seg.; y para la de 15 gr., $t = 10,1708$ seg.

Lo que dá la suma de los tiempos empleados en la subida y baxada por ambas alturas halladas, 31,961 seg. para el angulo de 75 gr., y para el de 15 gr., 18,4558 seg.

En fin con la formula $e = \frac{PM}{SD}$ Log. $\frac{PM + SDVt}{PM}$, en que las velocidades iniciales horizontales están al inverso de las verticales, calcúlo los espacios que deberá correr el cuerpo en los dos intervalos de tiempo hallados; y resulta que baxo la inclinacion de 15 gr., será la amplitud del tiro 8950,2 pies, quando baxo la inclinacion de 75 gr., solo es esta amplitud de 6161,2 pies, mui poco mas de los dos tercios de la primera amplitud.

157. Es digno de observarse que si en el vacio pertenece el maximo del alcance à una inclinacion de 45 gr. es porque à iguales distancias de esta inclinacion es el alcance igual, aumentandose este al paso que se acerca la inclinacion à los 45 grados. Pero enseñandonos igualmente el calculo y la experiencia que en el medio resistente, con inclinaciones igualmente distantes de este angulo, es el alcance mayor baxo la inclinacion menor; parece que en este caso deben variar las cosas, no perteneciendo ya el mayor alcance à la inclinacion de 45 gr., como en el vacio, y aun discrepar tanto mas de este angulo la inclinacion perteneciente al maximo de la amplitud, quanto mayor sea la resistencia del medio. Advirtiendo ademàs que la amplitud del tiro 8950,2 baxo el angulo de 15 gr. distaba poco de

los

los 9485, que corresponde à la inclinacion de 45 gr., quando los 6161,2 pies pertenecientes à la inclinacion de 75 gr., difieren mucho mas del citado alcance baxo la inclinacion de 45 gr., desde luego creí que fuese infundado el comun sentir que el maximo del alcance en los tiros por elevacion perteneciese à la inclinacion de 45 gr. en el medio resistente igualmente que en el vacio; y este pensamiento lo apoya el calculo.

Con efecto, suponiendo que la misma bala está arrojada con la misma velocidad inicial que hasta aqui, baxo el angulo de 30 gr.; ha resultado que esta bala debe ascender à una altura de 2531, 86 pies en 10,344 seg. de tiempo; que despues baxará de esta misma altura en 15,094 seg., y que en los 25,438 que emplea en subir y baxar, correrá horizontalmente un espacio igual à 9781,6 pies, mayor como se vé en 296,6 pies que su alcance quando era la inclinacion del tiro de 45 gr.: y si la experiencia no ha confirmado todavia esta que creo ser una verdad, me persuado que la incertidumbre que en esta parte queda, pende en parte de la dificultad de separar unos de otros los efectos de las diferentes causas fisicas que intervienen en los alcances de los tiros por elevacion, y tal vez en parte de que para este fin no se hayan hecho los experimentos como se deben.

CONCLUSION.

158. RESUMIENDO todos estos calculos, resulta 1: que en el ascenso vertical con una velocidad primitiva de 1600 pies por segundo, ascenderá una bala de 24 à 3973 pies en $11\frac{1}{2}$ seg. de tiempo, en lugar de 400 pies à que debia ascender en el vacio en 50 seg. de tiempo;

que

que despues baxará la misma bala en 22½ seg. de la altura de 3973 pies à que havia ascendido ; y que su velocidad final al tiempo de llegar al suelo será de 261 pies ; quando en el vacio el tiempo que emplearia en baxar de la misma altura seria poco menos de 16 seg., y la velocidad final de 504 pies.

2. Que el alcance de un tiro baxo la inclinacion de 45 gr. con una bala de 24, y con una velocidad primitiva de 1600 pies, solo es aqui de 9485 pies en lugar de 80© que serian en el vacio.

3. Que siendo 5971 ½ pies lo que huviera corrido horizontalmente la misma bala con la parte horizontal de su velocidad primitiva, en el tiempo que emplea en ascender hasta el vertice de su curva, corresponde así este vertice à poco menos de los dos tercios de su amplitud total.

4. Que quando en el vacio, los tiros executados con igual impulso, baxo dos inclinaciones al horizonte igualmente distantes de la de 45 gr. tienen igual alcance; en el medio resistente resultó al contrario que baxo un angulo de 75 gr., pasó mui poco al alcance, de los dos tercios de lo que fue baxo un angulo de 15 gr., sin embargo de ser este el complemento del otro.

5. En fin que haviendo resultado el alcance baxo un angulo de 30 gr. mayor que baxo el de 45 gr. por mas que se pretenda que nuestras formulas, por no incluir, como efectivamente no incluyen todos los elementos que entran en el efecto de los tiros por elevacion, no pueden conformarse con exâctitud con lo real y practico ; me persuado à que siempre haya de resultar que en el medio resistente, no pertenece el mayor alcance à la inclinacion de 45 gr. ; y que para este mayor alcance, quanto mayor sea la violencia del tiro, la densidad del medio, y la superficie del cuerpo arro-

arrojado respecto à su masa; tanto mas se deberá baxar la punteria: pues que en el caso que nos hemos propuesto, para una velocidad inicial de 1600 pies, el maximo del alcance corresponde segun el calculo, con corta diferencia à una inclinacion de 33 grados.

Por todo lo qual se vé en primer lugar quan diferente es la amplitud del alcance de un tiro por elevacion en un medio resistente, aunque tan raro como es el aire, que en el vacio, y en segundo lugar quanto se aparta de la figura parabolica la curva descrita en este caso por los proyectiles.

PROBLEMA XXXII.

159. POR ultima qüestion en esta materia propongamonos hallar la superficie plana que debiera presentar al aire un cuerpo del peso de 150 libras para que cayendo verticalmente no pase su velocidad de 16 pies por segundo.

La formula que corresponde à este caso es (§ 111, 135) $M = \frac{SDuu}{16}$, y dá $S = 162,37$ pies quadrados, que pertenecen à un circulo cuyo diametro seria de 14 pies, $4\frac{1}{2}$ pulgadas; con cuyo auxilio cayendo un cuerpo de seis arrobas de peso libremente nunca pudiera pasar su velocidad de la que adquieren los graves cayendo verticalmente en el vacio de la altura de 4 pies.

160. *Observaciones.* 1. En todo este capitulo hemos prescindido de la varia densidad del aire que podia proceder del movimiento del cuerpo. Si se quisiera atender à ella, suponiendo que sigue esta densidad la razon de una potencia qualquiera n de la velocidad del cuerpo movido; en tal conformidad que esta densidad quedase en la natural

quan-

quando la velocidad del cuerpo es igual à cero; con hacer en nuestras formulas diferenciales, la densidad ordinaria D, igual à esta misma densidad D multiplicada por $\frac{m^n + u^n}{m^n}$, en que u representa la velocidad del cuerpo movido, m un coeficiente qualquiera cuyo valor determinará la experiencia, y debe ser en general tanto mayor quanto mas uniforme sea la densidad del medio, por manera que si es la densidad constante, es $m = \infty$; resultarian (§ 141, 144) para el descenso vertical las formulas, $dt = \frac{M}{SD} \times \frac{m^n du}{(a^2 - u^2)(m^n + u^n)}$; $de = \frac{M}{SD} \times \frac{m^n u du}{(a^2 - u^2)(m^n + u^n)}$. Para el ascenso vertical (§ 149, 151); $dt = \frac{aa}{32} \times \frac{-m^n du}{(a^2 + u^2)(m^n + u^n)}$; $de = \frac{aa}{32} \times \frac{-m^n u du}{(a^2 + u^2)(m^n + u^n)}$. Para el movimiento horizontal (154); $dt = \frac{PM}{SD} \times \frac{-m^n du}{u^2 (m^n + u^n)}$; $de = \frac{PM}{SD} \times \frac{-m^n du}{u (m^n + u^n)}$. En que dudo que pueda pasar de 1 ò 2 el valor de la potencia n de la velocidad en cuya razon aumenta la densidad del aire por la compresion del cuerpo movido; y en cuyo caso son faciles de hallar las integrales de todas estas formulas.

Sin

161. 2. Sin embargo de que, por la forma que tienen las balas, el aire, por el movimiento de estas, poco puede mudar su densidad, y de conformarse ademas nuestras formulas regularmente con los experimentos del Señor *Robins*: tal vez para mayor exâctitud en el ascenso y descenso vertical de las balas, sería util al quadrado *uu* de la velocidad, ponerle un coeficiente indeterminado, cuyo valor debiera dar la experiencia, como nos lo ha dado para el movimiento horizontal. Pero por faltarnos para esta determinacion, los suficientes datos, me ha parecido que interin no nos dé la experiencia estos datos, mejor era usar entretanto el quadrado *uu* de la velocidad sin coeficiente alguno.

162. 3. En nuestros calculos hemos supuesto que era en todos tiempos la misma la densidad del aire: pero nos manifiestan las observaciones del barometro lo falso de este supuesto: pues sus variaciones entre 29 y 31 pulgadas inglesas de altura, indican igual variedad en el peso atmosferico, lo que por pie cubico de aire dá una variacion de 46 granos, esto es 23 mas ò menos que los 286 peso del pie cubico de aire en su densidad media, la misma que hemos admitido.

163. 4. Hemos observado que segun nuestros calculos, el mayor alcance no correspondia al angulo de 45 gr. contra lo que hasta aqui se ha creido; los experimentos en que se fundan los que así piensan, están hechos con bombas, balas de cañon ò de fusil, todos cuerpos que presentan al aire poca superficie respecto à su masa; por cuyo motivo, los demas accidentes que perturban el efecto de los tiros, impiden juzgar si las diferencias que se observan en estos efectos proceden ò no de la diferente inclinacion de los tiros: para obviar à este incom-

beniente

beniente me pareceria util, repetir estos mismos experimentos con plomo de municion; la mostacilla me pareceria la mas oportuna para el caso, porque, presentando al aire mucha superficie respecto à su masa, el efecto de este medio sobre la inclinacion del tiro para el mayor alcance, seria mucho mas perceptible; y si en una larga serie de experimentos hechos con mosquete que pueda ajustarse de firme à todas suertes de inclinaciones, resultára, como no lo dudo, que para el mayor alcance se debe bajar considerablemente la punteria de la inclinacion de 45 gr. hasta aqui admitida; seria consiguiente que lo propio deberia suceder à las balas y bombas; y que la unica diferencia estaria en el mas ò menos.

Otras muchas observaciones se pudieran hacer en el particular de los tiros por elevacion. Pero no siendo el objeto de este pequeño escrito tratar à fondo materia alguna, sino facilitar à alumnos que cursan una clase publica, el estudio de la Mecanica, dandoles de sus ramos mas esenciales una noticia suficiente, para que puedan despues por sí ò con el auxîlio de los libros adelantar en esta ciencia quanto necesiten: terminaré este capitulo con advertir que los que quisieren tomar mas nociones en este importante ramo de la Fisica, deben consultar la excelente, è ya citada obra de *Benjamin Robins*; y para conocer en general la curva que describen los proyectiles en el medio resistente, la Mecanica del *Abate Marie*, y el tomo IV de las instituciones de Mathematicas de *D. Benito Bails.*

PROBLEMA XXXIII.

165. DADO un vaso de una figura geometrica lleno de agua hasta una

 altura

altura dada, y un orificio horizontal en el fondo de este vaso; se pide el tiempo que empleará la superficie del agua para baxar en este vaso de una altura dada.

Solucion. Sea t el tiempo buscado; h la altura total del agua sobre el orificio; K la superficie de este orificio disminuida segun lo requiere la contraccion de la vena; x la altura del agua sobre el orificio, quando ha llegado su superficie à esta altura; p la velocidad que produce sobre los graves la accion de la pesantez en el tiempo de un segundo; Cyy la superficie horizontal del licor quando ha llegado esta à la altura x, suponiendo que la figura del vaso sea una curva de revolucion.

La formula $de = udt$ de los movimientos variados expresa en esta question, que la diferencial de ò segun las actuales denominaciones dx del espacio corrido por la superficie Cyy en el tiempo dt, quando ha llegado el licor à la altura x, es igual à la velocidad u con q̃ baxa esta superficie dentro del vaso, multiplicada por el instante dt. Pero es esta velocidad, à la q̃ tiene el agua al salir por el orificio, como la area del orificio, es à la de esta misma superficie; y la velocidad al salir por el orificio es igual à $\sqrt{2px}$; lo que dá esta proporcion; $Cyy : K :: \sqrt{2px} : u = \frac{K\sqrt{2px}}{Cyy}$; sustituyendo pues resulta $dt = \frac{Cyydx}{K\sqrt{2px}}$. Sustituyendo por yy su valor sacado de la figura del vaso, integrando y sustituyendo h por x, se tendrá en primer lugar el tiempo que empleará el vaso en vaciarse hasta la altura del orificio: restando despues la integral en x de la expresada en h, el resto será el valor de t buscado.

PRO-

PROBLEMA XXXIV.

165. DEterminar las condiciones generales que deben concurrir para que un fluido se ponga en equilibrio por sola su pesantez en un vaso flexible, pesado è inextensible.

Sea AMNOPB un corte vertical de este vaso ya puesto en el equilibrio buscado; M, N, O, P, quatro puntos contiguos tomados à igual distancia unos de otros en la circunferencia de este corte. Mirando como fixos los puntos extremos M y P, es evidente 1. que la posicion del elemento medio NO debe ser tal, que la resultante NT de las fuerzas que obran sobre este elemento en la direccion ONT, sea igual à la resultante Ot de las que obran sobre el mismo elemento en la direccion NOt: 2. que las fuerzas que obran en el punto N son, el peso del elemento MN que obra en la direccion vertical, la presion del fluido que obra en una direccion que divide en dos partes iguales al angulo MNO, y la tirantez del cordon MN que obra en la direccion NM. Tomando pues la vertical NS para representar el peso del elemento MN, y para representar la presion del fluido en N, la recta NR cuya prolongacion NZ divide en dos partes iguales al angulo MNO formado por dos lados contiguos de la curva; en cuyo caso difiere el angulo MNZ de un recto solo en una cantidad infinitamente pequeña. Siendo NR y NS dos datos de la question, resulta conocida la posicion y magnitud de la resultante NQ de estas dos fuerzas. Por otra parte, por suponerse resuelto el problema, la posicion del lado MN respecto al NO se supone dada, como tambien la de NT resultante de todas las fuerzas que obran para tirar del cordon ò lado infinitamente pequeño NO en la direccion ON: luego en el paralelogra- Fig. 24.

mo

mo VNQT son conocidas la posicion y magnitud del lado NQ, la posicion del lado NV, y la de la diagonal NT; por consiguiente con solo el auxilio de la Geometria se podrá hallar el valor de NT, el que igualado con el de Ot hallado del mismo modo, resolverá la question.

Para esto desde los puntos M, N, O, P, tiro à la horizontal AB que representa el nivel del fluido las perpendiculares MH, NH', OH'', PH'''; tiro MG paralela à AB, prolongo NS y TQ hasta que se encuentren en D; sobre ND tiro la perpendicular QE, y executando lo propio para el punto O: en el triangulo QSE, es $SE = SQ \times \text{cos. } QSE = NR \times \text{cos. } RNS$; $QE = SQ \times \text{sen. } QSE = NR \times \text{sen. } RNS$; en el triangulo QNE, es $\text{sen. } QNE = \frac{QE}{NQ} = \frac{NR \times \text{sen. } RNS}{NQ}$; $\text{cos. } QNE = \frac{NE}{NQ} = \ldots\ldots \frac{NS + NR \times \text{cos. } RNS}{NQ}$; en el triangulo NQD, el angulo NQT suplemento de NQD es igual à la suma de los angulos QND, QDN, y por consiguiente, $\text{sen. } NQT = \text{sen. } (QND + QDN) = \text{sen. } QDN \times \text{cos. } QND + \text{cos. } QDN \times \text{sen. } QND$; y por ser $QDN = MNG$, sustituyendo valores resulta, $\text{sen. } NQT = \frac{\text{sen. } MNG (NS + NR \times \text{cos. } RNS) + NR \times \text{cos. } MNG \times \text{sen } RNS}{NQ} = \frac{NR + NS \times \text{sen. } MNG}{NQ}$; porque $\text{sen. } MNG \times \text{cos. } RNS + \text{cos. } MNG \times \text{sen. } RNS = \text{sen. } (MNG + RNS) = \text{sen. } MNZ = 1$. Pero en el triangulo TNQ, es $\text{sen. } TNM = \text{sen. } NTQ : \text{sen. } TQN :: NQ : NT = NQ \times \frac{\text{sen. } NQT}{\text{sen. } MNT} = \frac{NR + NS \times \text{sen. } MNG}{\text{sen. } MNT}$: de donde esta equacion $\frac{NR + NS \times \text{sen. } MNG}{\text{sen. } MNT} = \frac{Or + Os \times \text{sen. } POH''}{\text{sen. } POt}$.

Para

Para expresar esta equacion analiticamente sea $AH = x$: $AH' = x' = x + dx$; $AH'' = x'' = x' + dx' = x + 2dx + ddx$; $MH = y$; $NH' = y' = y + dy$; $OH'' = y'' = y' + dy' = y + 2dy + ddy$; $MN = NO = OP = ds$ constante; el radio de curvatura en N, $= R$, y en $O = R' = R + dR$: suponiendo ademas que la curva AMNOPB es un cordon cuyo ancho es b, que un corte perpendicular à su longitud presenta una superficie igual à aa, y que el peso especifico del material del vaso es igual al del fluido que contiene; resultará $NS = aads$; $NR = by'ds$; $\text{sen. MNG} = \frac{MG}{MN} = \frac{dx}{ds}$; y por ser el angulo MNT exterior al que forman entre sí dos lados contiguos de la curva considerada como poligono, es $\text{sen. MNT} = \frac{ds}{R}$; sustituyendo en la equacion anterior resulta $\frac{R}{ds}(by'ds + aadx) = \frac{R'}{ds}(by''ds + aadx')$.

Sustituyendo por y', y'', dx', sus valores resulta, $R(byds + bdyds + aadx) = (R + dR) \times (byds + 2bdyds + aadx + 2aaddx)$; reduciendo y despreciando los infinitamente pequeños del tercer grado, $Rbdyds + 2Raaddx + bydRds + aadRdx = o$; trasponiendo y sustituyendo en el segundo miembro por R su valor $\frac{dyds}{ddx}$; resulta $bds(Rdy + ydR) + aa(Rddx + dRdx) = -aadyds$, cuya integral es $bRyds + aaRdx = Ads - aayds$ sustituyendo por R su valor, transponiendo, multiplicando todo por ddx, y partiendo por ds; $bydyds + aa(dydx + yddx) = Addx$, cuya integral es

$\frac{1}{2}byyds$

$\frac{1}{2}byyds + aaydx = Adx + Bds$; sustituyendo por ds su valor $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, y separando variables, resulta $dx = \frac{(B - \frac{1}{2}byy)\,dy}{\sqrt{((aay - A)^2 - (B - \frac{1}{2}byy)^2)}}$; y sustituyendo en $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ este valor de dx, $ds = \frac{(aay - A)\,dy}{\sqrt{((aay - A)^2 - (B - \frac{1}{2}byy)^2)}}$; ambas equaciones integrables generalmente por las quadraturas, y producirán dos nuevas constantes cuyos valores así como los de A y B se deducirán de las condiciones particulares de la question.

Corolario 1. Para la *Lintearia* ò curva que forman las velas de los navios impelidos por el viento, hallandose estas suspensas verticalmente, se suele prescindir del peso del lienzo, lo que hace à $a = o$, y reduce las dos equaciones anteriores à las siguientes $dx = \frac{(B - \frac{1}{2}byy)\,dy}{\sqrt{AA - (B - \frac{1}{2}byy)^2}}$; $ds = \frac{A\,dy}{\sqrt{AA - (B - \frac{1}{2}byy)^2}}$

Estas son las equaciones que comunmente se admiten para la lintearia simple: pero como suelen tener las velas de los navios un peso considerable del qual para la indagacion de la verdadera curva que forman, no se puede prescindir legitimamente, y que ademas suelen estas estar atadas por muchos puntos, no pudiendo reducirse estos à menos de tres; quando en la resolucion de esta question solo hemos supuesto dos puntos fixos: es evidente que su verdadera resolucion pende de otros muchos mas elementos que los que hemos empleado.

Corolario 2. Para la *Cadenaria* ò curva que forman las cuerdas suspensas por sus extremos, no sucede lo propio que en la lintearia; no haviendo aqui fluido que comprima, debe hacerse $b = o$,

lo

lo que reduce las dos equaciones primitivas à las siguientes:

$$dx = \frac{Bdy}{\pm\sqrt{(A-aay)^2 - BB}} \cdots ds = \frac{(A-aay)\,dy}{\pm\sqrt{(A-aay)^2 - BB}}$$

y son las equaciones à la cadenaria comun formada por cuerdas uniformes en su grueso; cuyas integrales son

$$x = \frac{B}{aa}\,\mathrm{Log.}\ \frac{A - aay \pm \sqrt{(A-aay)^2 - BB}}{C}; \ldots .$$

$$s = D \pm \frac{\sqrt{(A-aay)^2 - BB}}{aa}$$ en que por ser $y = o$, $s = o$, quando $x = o$, resulta $D = \sqrt{AA - BB}$; $C = A - D = A - \sqrt{AA - BB}$; y por consiguiente

$$x = \frac{B}{aa}\,\mathrm{Log.}\ \frac{A - aay \pm \sqrt{(A - aay) - BB}}{A - \sqrt{AA - BB}}; \ldots$$

$$s = \frac{\sqrt{AA - BB} \pm \sqrt{(AA - aay)^2 - BB}}{aa}$$ no quedando así mas que las dos indeterminadas A y B, cuyos valores penden de las circunstancias particulares de la question, esto es de la posicion dada de los dos puntos de suspension, y la longitud tambien dada de la cuerda: siendo en general $\frac{A-B}{aa}$ la cantidad de que pandeará la curva, ò el valor de la mayor ordenada posible, que corresponderá à la absisa $x = \frac{B}{aa}$ Log. $\frac{B}{A - \sqrt{AA - BB}}$, y à la porcion de cuerda $s = \frac{\sqrt{AA - BB}}{aa}$.

Corolario 3. Si la seccion del vaso cuya curvatura se busca es horizontal, es evidente que la figura de esta seccion deberá ser circular; porque siendo

do constante la altura del fluido sobre todos los elementos de su circunferencia, será tambien constante la presion que padecen estos elementos en la direccion perpendicular à la tangente en cada punto de la curva: luego deberá esta curva encerrar en una longitud determinada el mayor espacio posible, lo que solo puede pertenecer al circulo. Igual conseqüencia se saca de la equacion. . ,, ...

$\frac{NR + NS \times sen.\ MNG}{sen.\ MNT} = \frac{Or + Os \times sen. POH}{sen.\ POt}$; pues por ser la seccion horizontal, la quantidad que representa el peso de cada elemento no teniendo influxo en la curvatura de esta seccion, es NS y $Os = o$; de donde resulta $\frac{NR}{sen. MNT} = \frac{Or}{sen.\ POt}$; pero NR y Or representando la presion del fluido sobre dos elementos igualmente distantes de la superficie de este son iguales entre sí; luego será tambien sen. MNT $=$ sen. POt. Si pues siendo por lo supuesto iguales entre sí los elementos que forman la circunferencia de la seccion, lo son tambien los angulos de desvio de un elemento à otro; claro está que la curva de esta seccion solo puede ser un circulo.

Corolario 4. Supuesto lo que se acaba de demonstrar en el corolario anterior, y siendo NT la tension de un elemento de la curva, y NR la presion del fluido sobre este elemento; siendo ademas, para una seccion horizontal del vaso, NT $= \frac{NR}{sen. MNT}$ y sen. MNT $= \frac{ds}{R}$, lo que dá NT $= \frac{NR \times R}{ds}$, resulta esta proporcion, la tension de un elemento de la curva, es à la presion del fluido sobre este elemento, como $\frac{NR \times R}{ds}$, es à NR, como R, es à ds; ò la tension de un elemento de la circunfe-

cunferencia de un circulo, es à la suma de presiones del fluido sobre todos los puntos de esta circunferencia, como el radio, es à la circunferencia, esto es en una razon constante: luego al paso que aumente la circunferencia, ò el diametro de un circulo seccion horizontal de un tubo lleno de un licor hasta una altura dada, aumentará tambien la suma de presiones sobre todos los elementos de esta circunferencia, y por consiguiente aumentará del mismo modo y en la misma razon la tension de cada elemento de esta circunferencia: de donde se sigue que la tension que padecen las fibras de la seccion horizontal de un tubo lleno de algun licor, esta en razon compuesta del diametro de este tubo, en el sitio de la seccion, de la altura del fluido sobre la seccion, y del peso especifico de este fluido; y la resistencia à esta tension, de las fibras de esta misma seccion, en razon compuesta del grueso del canto del añillo circular de la seccion, y de la tenacidad del material de que se compone. Lo que significa que, *los gruesos que deben tener ò los espesores en el canto de qualesquiera secciones perpendiculares à su longitud de los tubos ò caños de comunicacion, deben estar en razon directa de los diametros de sus huecos, de la altura del fluido sobre cada seccion, y del peso especifico de este fluido; y en razon inversa de la tenacidad de la materia de que se componen estos caños.*

PROBLEMA XXXV.

166. HAviendose de atajar el curso de las aguas à una altura considerable se propone hallar para este fin la mejor forma que se debe dar à un dique, suponiendo que unidas y travadas sus partes, solo puede girar sobre su angulo posterior; y al mismo tiempo no emplear en su

construccion sino la menor cantidad de material posible.

Fig. 25. *Solucion.* Supuesto que el dique haya de ser de cal y canto, que haya de tener en su parte superior un camino de andadura para facilitar los reparos que se hayan de hacer en èl; que por la parte posterior AC, su inclinacion sea tal que baxando la vertical AE sobre la base, sea CE $= \frac{1}{6}$ AE, que en fin la mayor altura de las aguas sea QF, siendo BQ lo suficiente para que las aguas no superen al dique, y el ancho del camino de andadura el menor que pueda ser. Sea ademas, p el peso especifico del agua, y q el del material. Haviendo baxado la vertical BF, lo que se pide es el valor de FD en el supuesto que hai equilibrio entre el impulso del agua y la resistencia del dique.

Para hallar este valor, hago AB $= a$, AE $=$ BF $= b$; BQ $= c$, CE $= \frac{1}{6}$ AB $= \frac{1}{6}b$; FD $= x$; BD $= y = \sqrt{bb + xx}$; lo que dá CK perpendicular à BD, $= \frac{b}{y}\,(a + \frac{1}{6}b + x)$; KD $= \frac{x}{y}\,(a + \frac{1}{6}b + x)$, BN $= \frac{b}{yy}\,(yy - ax - \frac{1}{6}bx - xx)$ $= b \times \frac{bb - ax - \frac{1}{6}bx}{bb + xx}$; BK $= \frac{bb - ax - \frac{1}{6}bx}{y}$; BR $= \frac{cy}{b}$; QN $= \frac{b^3 - abx - \frac{1}{6}bbx - bbc - cxx}{bb + xx}$, NF $= x \times \frac{ab + bx + \frac{1}{6}bb}{bb + xx}$. Tomando pues sobre la cara anterior del dique un elemento Ss, de cuyos extremos tirando à la vertical BF las perpendiculares SP,

SP, *sp*; haciendo NP $= u$, será P$p = du$; S$s = \frac{ydu}{b}$; la presion sobre el elemento Ss que represento por la perpendicular à BD, SL $= p \times$ S$s \times$ PQ: descompongo esta fuerza SL en dos, una en la direccion del radio vector CS, y otra perpendicular à este radio vector, será el valor de esta, $\frac{SL \times SK}{SC}$, y su momento respecto al punto C, SL $\times$ SK. Pero SL $= p \times$ S$s \times$ PQ $= p \times \frac{ydu}{b} \times$

$$\left(\frac{b^3 - abx - \frac{1}{6}bbx - bbc - cxx}{bb + xx}\right);$$ y SK $= \frac{bu}{y}$;

luego es el momento de la fuerza que obra sobre el elemento Ss para hacer girar este elemento perpendicularmente à la direccion del radio vector CS, igual à $pudu \times \left(\frac{b^3 - abx - \frac{1}{6}bbx - bbc - cxx - bbu - xxu}{bb + xx}\right)$ cuya integral multiplicada por p, y haciendo $u =$ NQ será el momento total de la fuerza que obra desde K hasta R para hacer girar el dique sobre su angulo posterior; pero porque la fuerza que obra desde K hasta D tiene una direccion contraria à la primera, el momento de esta fuerza sobre un elemento tomado entre K y D, es $pudu \times$

$$\frac{b^3 - abx - \frac{1}{6}bbx - bbc - cxx + bbu + xxu}{bb + xx}$$ cuya integral multiplicada por p, y haciendo $u =$ NF, debe restarse de la primera, y el resto igualarse con el momento del traspesio CABD respecto à la vertical que pasaria por su angulo posterior C, y es $q\left(\frac{1}{18}bb \times \frac{5}{36}b + ab\left(\frac{1}{6}b + \frac{1}{2}a\right) + \frac{1}{2}bx\left(\frac{x}{3}\right.\right.$

+

$+ a + \frac{1}{6}b) = q\,(\frac{5}{432}b^3 + \frac{1}{6}abb + \frac{1}{2}aab + \frac{1}{6}bxx + \frac{1}{2}abx + \frac{1}{12}bbx)$, en cuya equacion poniendo por y su valor, y despejando x, se tendrá el valor de FD buscado.

167. *Observacion.* Hemos dado aqui la resolucion de este caso de la construccion de las obras hidraulicas, solo para que sirva de apuntacion à las muchas precauciones que requieren semejantes empresas: pero à mas de lo que acabamos de decir que solo tira à no hacer en el caso propuesto gastos superfluos, que en esta parte suelen ser mui crecidos, la solidez de la construccion pide otras muchas consideraciones. Ya hemos dicho que estas especies de obras deben tener por la parte que recibe la impresion del agua un declive ò talus que debe ser lo menos un sexto de su altura: se debe ademas atender à la naturaleza de los materiales que se hayan de emplear, à la travazon de las partes de este material, ya entre sí, ò ya con el terrero posterior si debe ligar con èl; à que obras antiguas, si llegan algunas à atravesar las nuevas, no perjudiquen al asiento de estas; à que los estrivos en la parte posterior de la mamposteria no estén mui distantes unos de otros, y tengan su mayor fortaleza en su parte inferior: la experiencia ha dado à conocer que para estas distancias, los llenos debian ser iguales à los vacios; à dexar paso à las aguas que vienen de la parte posterior del dique si las filtraciones son tales que así lo requieran; à la construccion de los cimientos, cuidando de que las estacas estén clavadas de modo que no puedan ceder al peso que han de sostener; à que estas estacas estén unidas con un buen enrejado; que sus intervalos y si puede ser su parte anterior estén de

tal

tal modo embueltos en el material que nunca pueda llegarles el agua: tambien se debe por quantos medios se pueda impedir la resaca que suele hacer el agua debaxo de los cimientos de estas obras, procurando evitar quanto pueda ser los recodos, à menos que no lo pida la naturaleza de la obra; pues à mas de traer estos consigo un genero de fealdad sin aumentar la solidez, hacen crecer sin fruto los gastos, y producen en las revueltas remolinos perjudiciales à la firmeza y duracion de la empresa: el mejor medio de asegurar esta duracion es formar al pie de la obra una rampa artificial sostenida con estacas, y hecha de material de cal y canto; (la *Pozolana* que se trae de Civita-vequia en caso de ser obras en el mar, es mui recomendable) ò à lo menos de *Greda* bien ligada; tampoco son despreciables los resguardos hechos con faxinas y piedras sueltas: una fila de caxones al pie de la rampa llenos de un hormigon bien acondicionado y descansando inmediatamente sobre el terreno es un excelente modo de impedir la resaca. Por ultimo haviendo tierras que mojandose aumentan considerablemente su volumen, como son las tierras gredosas ò arcillas: si despues de levantado un paredon à una altura considerable, se tiene que llenar un intervalo de mucha extension entre este y el terreno inmediato, se debe en el modo de executar esta operacion atender à la naturaleza de las tierras que se emplean, no sea que echadas y apisonadas en seco, hinchandose despues con las aguas, su empuje produzca en la obra movimientos perjudiciales à su firmeza. Bastando lo dicho hasta aqui para dar à conocer à los que quieran emprender obras hidraulicas la necesidad de consultar antes con mucha atencion, y tener digeridas con tiempo y con los principios necesarios para su

inte-

inteligencia, los preceptos de los autores que han tratado exprofeso esta materia: pues piden estas obras para el acierto en su construccion y solidez mas conocimientos mathematicos que otras algunas.

PROBLEMA XXXVI.

Fig. 26. 168. SEA una superficie plana rectangular con dos bases paralelas al horizonte, cuyo perfil está representado en la figura por OD; suponiendo que esta superficie esté enteramente sumergida en el agua, que LQ es la velocidad de esta, y que la superficie por qualquiera causa que sea este precisada à moverse paralelamente à si misma en una direccion qualquiera LI; se pregunta qual ha de ser la velocidad de esta superficie y la inclinacion que debe tener respecto al horizonte, para que su cantidad de movimiento sea un maximo.

Solucion. Sea $LI = u$, esta velocidad, $LQ = V$ la velocidad del agua, OLD el angulo que forma con el horizonte la superficie sumergida, cuyo seno representamos por s, y por c su coseno; sea ademas el seno del angulo OLI igual à m y su coseno igual à n; será seno $DLI = sn + cm$; descomponiendo la velocidad LQ del agua en dos, la una igual y paralela à LI, y la otra LK; la parte LI de la velocidad del agua por ser igual y paralela à la velocidad que se supone toma la superficie sumergida, no tiene accion sobre esta superficie; queda pues de la velocidad V la parte LK que obra sobre la superficie sumergida del mismo modo que si estando esta superficie en quietud, el agua la chocára en la direccion y con la velocidad LK oblicua à esta superficie: baxando pues del punto K sobre

sobre OD, la perpendicular KM; $\frac{1}{32}$ MK será la presion perpendicular del fluido sobre todos los elementos del plano OD; pero como este plano está necesitado à moverse en la direccion LI, es evidente que para tener el efecto real de la impresion del fluido en esta direccion; es necesario multiplicar $\frac{1}{32}$ MK por el seno del angulo DLI formado entre la direccion OD del plano, y la LI del movimiento; multiplicando despues este producto por la velocidad u del plano, por la arëa de este plano, y por el peso especifico del agua, el todo valuado en pies ingleses; el producto será la cantidad de movimiento que debe ser un maximo.

Haciendo pues igual à S la superficie del plano, è igual à p el peso especifico del agua; por las reglas de la Trigonometria, ò siguiendo el metodo del § 33 pag. 25, 26, hallaremos que $LK = (VV + uu - 2nVu)^{\frac{1}{2}}$; sen. LQI $=$ sen. KLQ $= \frac{mu}{LK}$; cos. LQI $=$ cos. KLQ $= \frac{V - nu}{LK}$; de donde sen. $MLK = \frac{sV - u\ (sn + cm)}{LK}$; $MK = sV - u\ (sn + cm)^2$ será pues $\frac{1}{32}\ Sp\ (sV - u\ (sn + cm))^2\ (sn + cm)\ u$, la cantidad de movimiento que debe ser un maximo, y en que las variables son s, c, u.

Diferenciando esta cantidad de movimiento respecto à u, suponiendo en primer lugar s y c constantes, è igualando la diferencial à cero, resulta $u = \frac{1}{3}\ V \times \frac{s}{sn + cm} = \frac{1}{3}\ V$, si $m = o$, esto es si el plano sigue la direccion del agua.

Sustituyendo ahora este valor de u en la expresion general de la cantidad de movimiento, resulta

ta ser esta igual à $Sp\left(\frac{1}{6}sV\right)^3$; cuyo maximo corresponde à $s = 1$, esto es quando la posicion del plano es perpendicular à la direccion del movimiento del fluido.

Pero como en lugar de dexar indeterminada la velocidad u del plano, se puede pedir el maximo de la cantidad de movimiento haciendo solo variar s y c, siendo dada la magnitud y direccion de $LI = u$; para hallar este maximo, se diferenciará la cantidad de movimiento primitiva, considerando u como constante; y si en esta cantidad de movimiento se hace sen. $DLI = (sn + cm) = r$; su cos. $= cn - sm = t$, la diferencial igualada à cero dará $\frac{c}{t} + \frac{m}{rt} = \frac{3u}{V}$ esto es que $\frac{\text{cos. OLD}}{\text{cos. DLI}} + \frac{\text{sen. OLI}}{\text{sen. cos. DLI}} = \frac{3u}{V}$: sustituyendo valores y haciendo $6mnu - mV = A$; $(3mm - 3nn)u + nV = B$; $3mnu + mV = D$, resulta el valor del cos. del angulo buscado OLD, $c = \sqrt{\frac{BB - 2AD \pm B\sqrt{BB - 4AD + 4DD}}{2AA + 2BB}}$ y el del seno del mismo angulo $s = \ldots\ldots\ldots$ $\sqrt{\frac{2AA + BB + 2AD \mp \sqrt{BB - 4AD + 4DD}}{2AA + 2BB}}$ expresados ambos en cantidades conocidas. Sustituidos pues estos valores de S y c en la expresion general de la cantidad de movimiento, resultará para la superficie impelida el maximo pedido de esta cantidad de movimiento, y quedando asi determinada la posicion de LD, será

esta

esta la direccion buscada para que con la velocidad u dada reciba el maximo de la cantidad de movimiento.

PROBLEMA XXXVII.

169. SI la ala OD en lugar de moverse paralelamente à si misma, gira al rededor de un centro C: lo que para la aplicacion al efecto de las maquinas importa conocer no es ya como en el caso anterior la cantidad de movimiento de esta ala, sino el momento de esta cantidad de movimiento, respecto al centro C; y como en este caso cada elemento tiene una velocidad proporcional à su distancia al centro, y que ademas puede la ala tener una direccion qualquiera, ò dirigirse al centro de rotacion, distinguiremos en esta question dos casos; el primero en que la direccion de la ala no pasa por el centro de rotacion. Fig. 27.

Para su resolucion, sea CA $=$ CD $= a$; CO $= b$; la longitud de la ala que recibe el choque del agua, y se supone enteramente sumergida en este fluido, OD $= c$; sen. COD $= f$; cos. COD $=$ cos. DOR $= h$; resulta $c = -hb + \sqrt{aa - bbff}$; OL $= z$; L$l = dz$; sen. OCA $= r$; cos. OCA $= q$; resulta CL $= \sqrt{bb + zz + 2bhz}$; haciendo despues igual à V la velocidad horizontal del fluido, è igual à u la del extremo inferior D de la ala; por la proporcion CD: u:: CL: LI, resultará LI $= \frac{u}{a}\sqrt{bb + zz + 2bhz}$, despues sen. DLQ $=$ sen. OLQ $=$ cos. (OCA $+$ DOR) $= hq - fr$; sen. DLI $=$ cos. CLO $= \frac{z + bh}{\sqrt{bb + zz + 2bhz}}$: supuestos estos valores y que la cantidad de movimiento en el problema

 ante-

anterior es $\frac{1}{32} pS$ (V. sen. DLQ $- u$. sen. DLI$)^2 \times$ u. sen. DLI; sustituyendo dz por S; $hq - fr$ por sen. DLQ; $\frac{u}{a} \sqrt{bb + zz + 2bhz}$ por u; $\frac{z + bh}{\sqrt{bb + zz + 2bhz}}$ por sen. DLI; resulta esta cantidad de movimiento para un elemento Ll de la longitud de la ala OD, igual à $\frac{1}{32} pdz \left(V(hq - fr) - \frac{u}{a}(z + bh) \right)^2 \frac{u}{a}$ $(z + bh)$: y su momento respecto al centro C de rotacion igual à $\frac{1}{32} pdz \left(V(hq - fr) - \frac{u}{a}(z - bh) \right)^2$ $\frac{u}{a}(z + bh) \sqrt{bb + zz + 2bhz}$: para cuya integracion se hará $z = b\left(\frac{f(1 - mm) - 2hm}{2m}\right)$; lo que dará $\sqrt{bb + zz + 2bhz} = fb \cdot \frac{1 + mm}{2m}$; $z + bh = bf \cdot \frac{1 - mm}{2m}$; $dz = - bfdm . \frac{1 + mm}{2mm}$: en que $m = \frac{1 - h}{f}$ quando la integral es igual à cero, è igual à $\frac{a - \sqrt{aa - bbff}}{bf}$, quando la integral es completa, cuyos valores de m corresponden el primero à $z = o$, y el segundo à $z = c = - hb + \sqrt{aa - bbff}$; resultará la integral completa; la que multiplicada por el ancho de la ala, dará el momento buscado de la cantidad de movimiento de la ala OD que gira al rededor del centro de rotacion C, qualquiera que sea la velocidad de esta ala.

En fin, para conseguir el maximo de este momento se le diferenciará haciendo variar u, la diferencial igual à cero dará la velocidad con que debe girar esta ala para que el momento de su cantidad de movimiento, respecto al centro C de rotacion sea el mayor posible.

La

170. La resolucion del segundo caso mucho mas comun que el primero, en que la direccion de la ala pasa por el centro C de rotacion, se consigue con solo sustituir en la formula diferencial del caso anterior cero por f y 1 por h, lo que dá Fig. 26.

$$\frac{1}{32} p dz \left(Vq - \frac{u}{a}(b+z)\right)^2 \cdot \frac{u}{a}(b+z)^2$$

; cuya integral es

$$\frac{p}{32}\left(\frac{V^2 uq^2}{3a}\left(\overline{b+z}^3 - b^3\right) - \frac{2Vuq^2}{4aa}\left(\overline{b+z}^4 - b^4\right) + \frac{u^3}{5a^3}\left(\overline{b+z}^5 - b^5\right)\right)$$

: diferenciando de nuevo haciendo variar u, igualando la diferencial à cero, sustituyendo por b la distancia del centro ò exe de rotacion à la parte superior de la ala sumergida y por z el resto de este ala ò la cantidad de que esta metida en el agua, siendo siempre $b+z$ el total de la distancia del exe de rotacion al extremo inferior de la ala, y resolviendo esta equacion se sacará la velocidad que debe tener esta ala para que el momento de su cantidad de movimiento sea un maximo.

Hallado así el valor de u, si se sustituye este valor en la integral que expresa el momento de la cantidad de movimiento, que se multiplique esta integral por el ancho de la ala, que se parta el producto por el radio del tambor, del qual se supone que cuelga un peso que se trata de levantar en alto, ò en cuya circunferencia resiste cierta potencia que se debe vencer; que el cociente se parta por la velocidad que resulta en la circunferencia del tambor, de la hallada u para el extremo D de la ala, segun sus distancias al centro ò exe de rotacion; el nuevo cociente que resulta de esta segunda division será el valor del peso que podrá levantar

tar ò la intensidad de la potencia que podrá vencer la maquina con la velocidad hallada ; y será este peso ò esta potencia tal que, si se le aumenta ò disminuye, el efecto de la maquina en un tiempo dado será siempre menor que si se le aplica cabalmente el peso ò la potencia hallados.

171. El modo de aplicar este calculo à una rueda compuesta de varias alas en numero determinado es el siguiente. 1. Se observará que no obrando el agua en cada ala mas que sobre la parte que dexa descubierta la ala anterior, antes de diferenciar la integral para buscar la velocidad que corresponde al maximo del momento de la cantidad de movimiento, se debe sustituir por b no como antes la distancia del exe de rotacion à la parte superior de cada ala sumergida, sino la distancia del mismo exe, en cada ala, à la parte superior de esta que dexa descubierta la ala anterior, quedando siempre $b + z$ igual à la distancia del exe de rotacion al extremo de la rueda, lo que dará tantas integrales parciales quantas alas hai expuestas al choque del agua hasta llegar à la vertical que pasa por el centro de la maquina: 2. Se observará tambien que los valores de q corresponden à angulos que varian para cada ala: 3. Se debe reparar que no ostante de no obrar el fluido mas que sobre la parte de cada ala que dexa descubierta la ala anterior; siendo el movimiento de todas estas alas obliquo al del fluido, menos el de la ala que pueda hallarse en la vertical, cada ala experimenta en su superficie posterior de parte del fluido una resistencia à su movimiento que corresponde à toda la parte posterior sumergida en el agua, tanto en las alas que anteceden al plano vertical que pasa por el exe de la maquina, como en las que haviendo pasado de esta vertical quedan en todo ò en parte meti-

metidas en el agua ; y en el calculo que acabamos de indicar solo hemos atendido à esta resistencia en la parte de cada ala que dexaba descubierta la ala anterior ; lo que produciendo una diferencia notable en los resultados obliga para la exâctitud del calculo à valuar el momento del resto de esta resistencia , y quitarlo de lo hallado anteriormente : diferenciando en fin este ultimo resto haciendo variar *u*, è igualando à cero la diferencia se conseguirá la velocidad que debe tomar una rueda de alas de una magnitud dada y metida en el agua de una cantidad dada , para que el momento de su cantidad de movimiento sea un maximo ; sustituyendo en fin este valor de *u* en la integral total suma de las integrales parciales , lo que resulte será el efecto buscado de toda la maquina.

Esta misma question se halla tratada con toda prolixidad en la excelente obra de Hidrodinamica del Abate Bossut , la que podrá consultar el que quisiere tomar mas instruccion en esta materia : solo advertiremos que por haver prescindido este celebre Mathematico , en su teoria , de la resistencia del agua al movimiento de la parte posterior de cada ala cubierta por la ala anterior , como tambien de la resistencia al movimiento de las alas que han pasado de la situacion vertical , los resultados de sus formulas excederán en algo lo que se saque siguiendo el metodo que acabamos de explicar para el calculo de estas Maquinas.

172. Si el fluido es elastico como es el aire, para hacer las formulas del § 168 y siguientes aplicables à este caso : 1. Por ser el efecto del choque doble de lo que es en los fluidos incompresibles, en lugar de $\frac{1}{32}p$ que hemos empleado por coeficiente de estas formulas , se usará $\frac{1}{16}p$, en que será p el

peso

peso especifico del agua partido por 850. 2. Si el cuerpo movido son las alas de un molino, se procurará hallar como antes y del mismo modo el momento de la cantidad de movimiento; pero si no hai rotacion, esto es que el movimiento sea progresivo como es el de un navio, solo se buscará la cantidad de movimiento. 3. Como en este caso se procura disponer tanto las alas del molino como las velas del navio de modo que puedan coger el viento en toda su extension; en lugar de V que hasta aqui fue la velocidad directa del fluido, se sustituirá V multiplicada por el seno del angulo que forman las velas ò alas con la direccion del viento; y en lugar de *u* velocidad del navio ò de la extremidad de las alas de un molino, *u* multiplicada por el seno del angulo que forma la direccion de la ruta del navio ò la del movimiento de las alas del molino, con la disposicion de las velas ò alas; la diferencia de estas velocidades así reducidas, será la velocidad relativa con que están impelidas en el navio las velas perpendicularmente à su disposicion. Para las alas de un molino, haviendo reducido en el modo que hemos visto para las alas de una rueda movida por el agua, la velocidad del extremo de la rueda perpendicular à su situacion, à ser la de un elemento qualquiera de esta ala y restadola de la velocidad reducida del viento, el resto será la velocidad con que estará impelido por el aire un elemento de esta ala. Multiplicando el quadrado de esta diferencia por el seno del angulo que forma la disposicion de las velas ò alas con la direccion del navio ò del elemento de las alas en su movimiento, y el producto por la velocidad de la ruta del navio ò del elemento de la ala en esta misma direccion, valuado despues del mismo modo la resistencia que, por ser la direccion de las velas ò alas

alas obliquá à la del viento, opone este en la parte posterior de aquellas à su movimiento ò el momento de esta resistencia, restando lo que de allí proviniere de lo hallado antes, será el resto la cantidad de movimiento del navio, ò el momento de la cantidad de movimiento del elemento de la ala de molino: lo demas se acabará como hasta aqui.

4. Para lo real y practico teniendo las alas de los molinos una inclinacion variable en toda su longitud el calculo que acavamos de indicar solo puede ser aproximado: y en el navio, hinchadas las velas por el impulso del viento, se engolfa este en la curvatura que forman aquellas; impelido asi el aire contenido en el hueco que forman las velas por el impulso del viento, se aumenta algo su densidad: por donde tal vez seria necesario poner à nuestras formulas algun coeficiente proporcionado à la velocidad con que choca el viento à las velas del navio, cuyo valor solo podrá dar la experiencia.

173. *Observacion.* Aunque en el § 107 queda demonstrado que para valuar la resistencia del agua al movimiento de una superficie sumergida en ella no es licito sumar ò restar la velocidad virtual del fluïdo procedente de su altura, con la compuesta de la efectiva del fluido y de la superficie sumergida; lo que excluye enteramente el influxo de la altura del fluido en la valuacion de su resistencia al movimiento. Sin embargo pudiendo esta altura producir algun efecto, aumentando en alguna cosa aunque corta, la resistencia al movimiento, como lo apunta el mismo Eulero en su comentario à la citada obra de Benjamin Robins, sin embargo de que no hace este autor uso alguno de esta observacion. Para la determinacion de este aumento, si lo hai, haciendo igual à a esta altura, è igual à m un coeficiente

ficiente qualquiera constante, propondria, al modo de lo explicado § 159, para atender à la diferente densidad del aire, multiplicar el quadrado uu de la velocidad combinada del fluido y del cuerpo sumergido en èl, por el coeficiente $\frac{m + a}{m}$; por cuyo medio se daria à la altura del agua el influxo que se quisiera, y resultaria para una misma velocidad u una resistencia que se aproximaria tanto mas à la uniformidad quanto mayor seria la constante m; y cuyo valor solo podrá determinar la experiencia.

Del mismo modo, para atender al principio establecido por los experimentos del Abate Bossut, que los fluidos resisten al movimiento de los solidos en razon del quadrado de la velocidad solo en el caso de ser el choque directo, y que se aproxima esta resistencia tanto mas à la razon de la simple velocidad quanto mas obliquo es el choque, llamando n el angulo que forma la direccion del choque con la situacion de la superficie chocada, à mas de las consideraciones que hemos usado hasta aqui, se aproximaria tal vez mucho à lo real y practico, si en nuestras formulas, por uu, se sustituyese $u \times \left(\frac{\text{cos. } n + u. \text{ sen. } n}{\text{cos. } n + \text{sen. } n} \right)$, pues es esta cantidad igual à uu, quando $n = 90$ gr., è igual à u, quando $n = 0$; si está fundado en la naturaleza este principio del Abate Bossut, poco podrian discrepar de la verdad los demas casos intermedios. Pero por otra parte, siendo la Hidraulica de las Ciencias Fisico Mathematicas la que ofrece las mayores dificultades; para la determinacion de todas las circunstancias del movimiento, en los demas casos que puedan acontecer nos es forzoso remitirnos à los autores que han tratado exprofeso esta materia.

INDI-

INDICE

DE LAS PROPOSICIONES CONTENIDAS en este Tratado.

masas

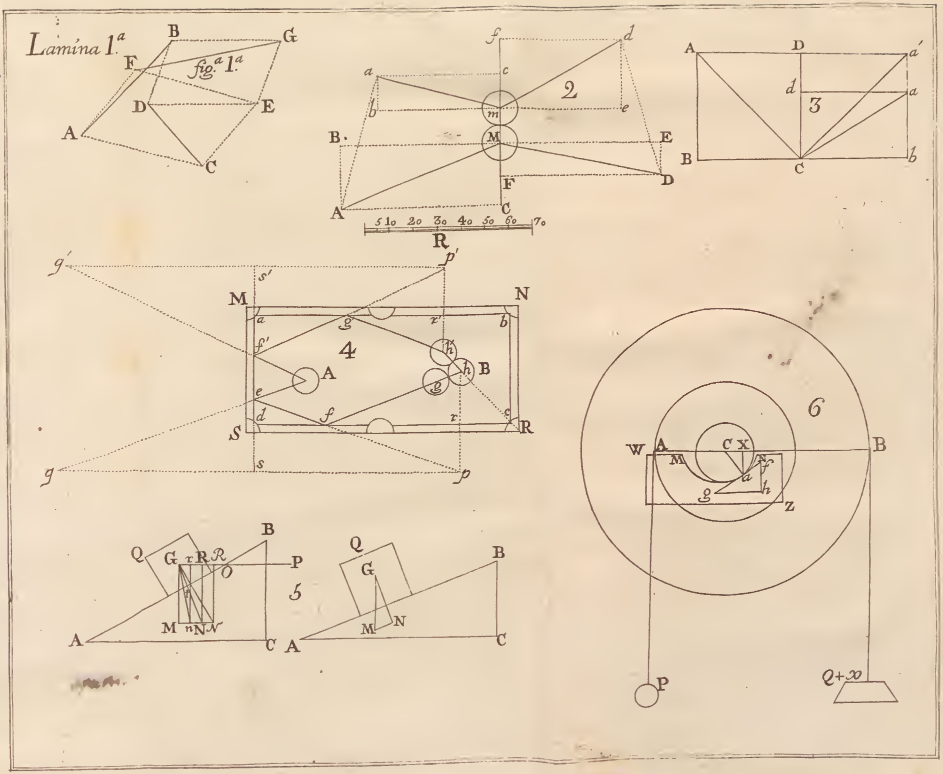
Deter-

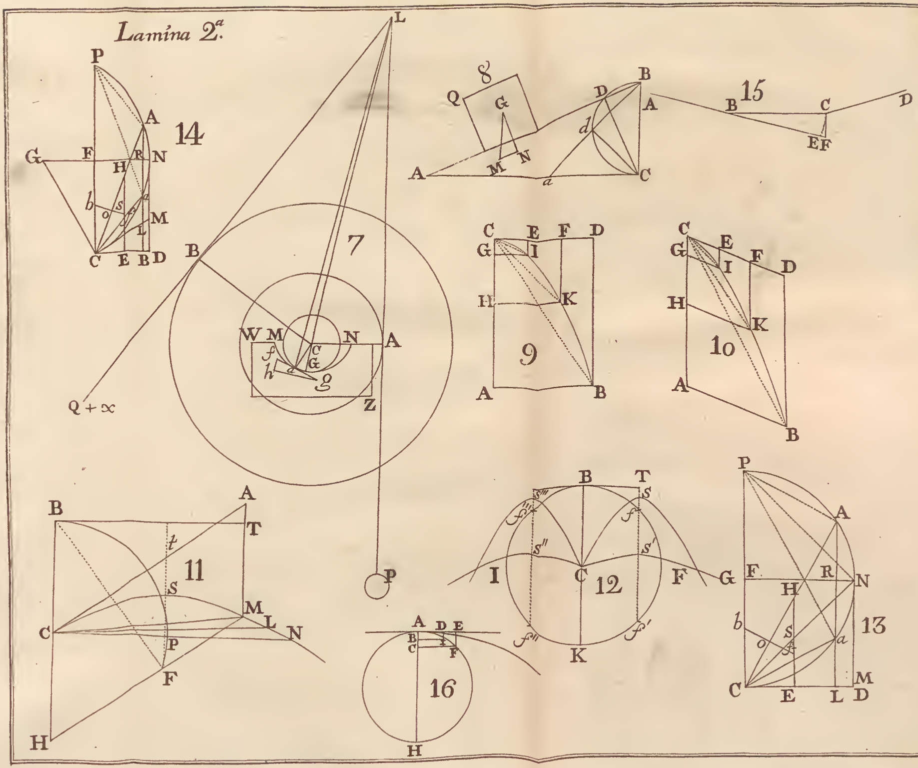
FIN.

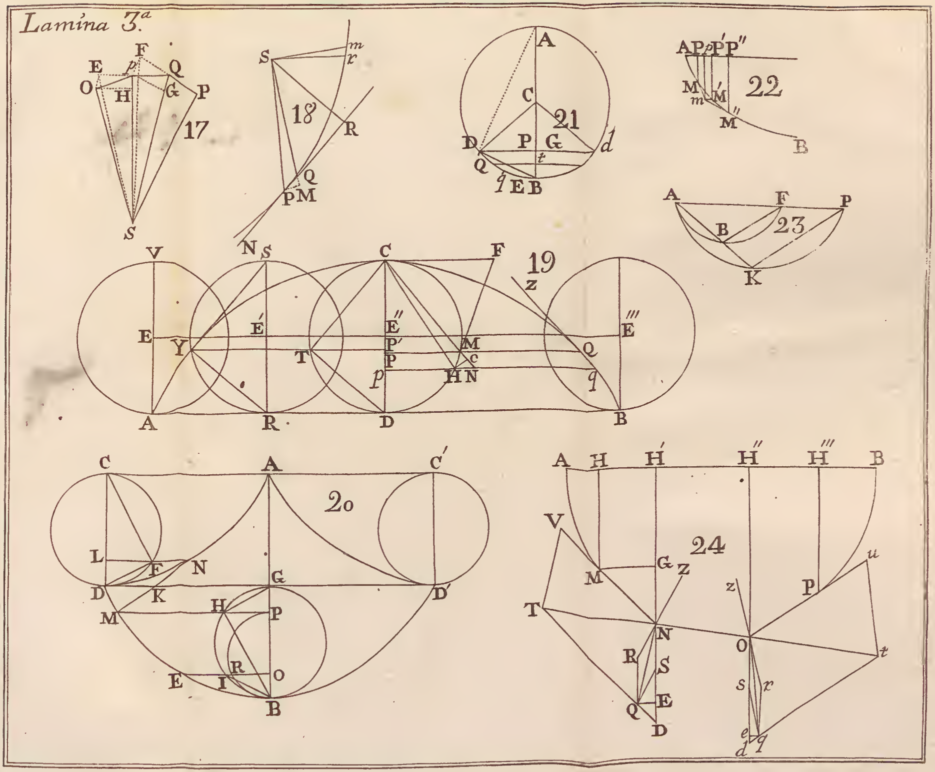
ERRATAS.

Fol.	Linea.	Dice.	Lease.
2	11	observadòr otra	observador tiro otra
7	26	quede	queda
11	24	*ca*, ò *cà*	C*a*, ò C*á*
	28	*à* CD	*a*CD
13	9	esta	este (po
16	26	gravedad G	gravedad G de este cuer-
17	2	G*m*	G*n*
20	ultima	P*x* (	P × (
23	21	H $\overset{1}{y}$ *h*	H y *h*
24	12	*al margen*	Fig. 7
30	13,14	el exceso de este peso sobre el paralelepipedo, quando está este	este peso, quando está el paralelepipedo
31	15,23 24	$Q - P - x$,	$Q - x$
34	20	$\overset{1}{r}$	$\overset{1}{t}$
35	4	$\overset{2}{t}$	$\overset{1}{t}$
38	1	$m = \frac{f}{VD}$	$u = \frac{f}{VD}$
39	23	T, K, B,	I, K, B
40	3	CI,::: como$\overline{CI}^2$,	CG, :::: como $\overline{GI}$
43	20	CI	CH,
52	32	paralela	paralela à
59	19	proporcional el	proporcional al
81	9	cuerqo	cuerpo
82	5	estas	sus
79		Fig. 22	Fig. 20
83	24,25	AB, AG,	CB, CG,
84		Fig. 21	Fig. 22
87		$dx = \frac{dz\ (}{\quad}$	$dz = \frac{dx\ (}{\quad}$

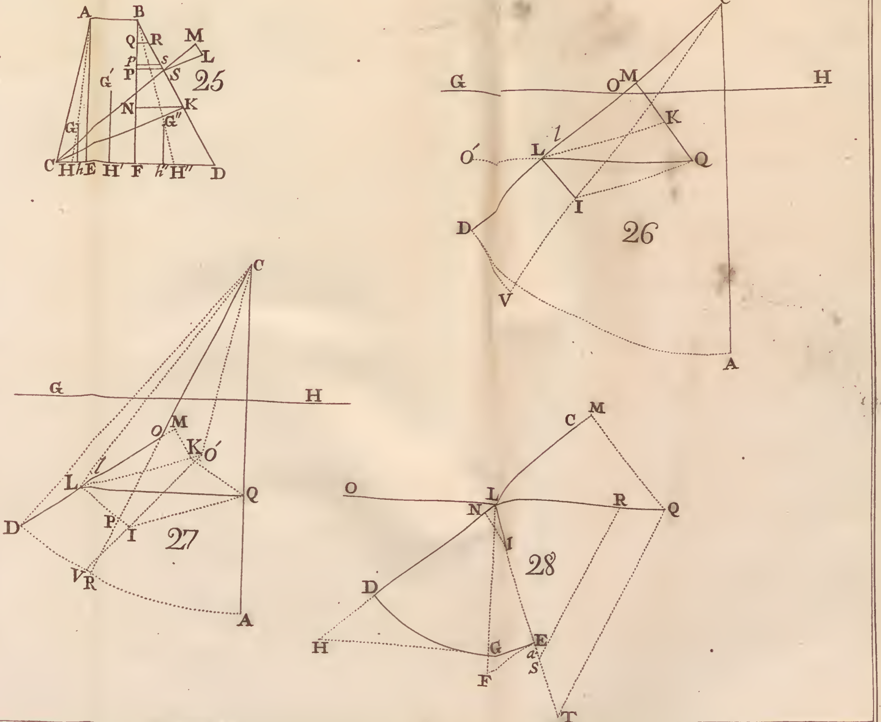
Fol.	*Linea.*	*Dice.*	*Lease.*
102	ultima	$\frac{cx^3dx}{32\,RR}$	$\frac{1}{32}uuD\times\frac{cx^3dx}{RR}$
94	11	$((a+34)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{8}u)^{\frac{1}{2}}$	$((a+34)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{8}u)^{2}$
	17	202	203
105	8	$\frac{1}{2}CRR$	$\frac{1}{2}CRRD$
115	ultima	$\frac{a}{a}$	$\frac{u}{a}$
119	14	de la	en la
120	21	$t=28'',809$	$t=28'',819$
141	2	$AK=\dot{x}=x\times dx$	$AH=\dot{x}=x+dx$
125	23	Log. $\frac{aa+VV}{2aa}$	Log. $\frac{aa+VV}{aa}$
	25	$e=3227,84$	$e=3235,3$
	ultima	19,1718	19,299
126	5	257,49	257,54
	5	$28'',9086$	28,9386 seg.
127	ultima	$e=\frac{n-1}{n-2}(\overset{1}{\overline{h^{n+2}}}\times$	$e=\frac{n-1}{n-2}V(\overset{1}{\overline{h^{n-1}}}\times$
143	21	$s=\frac{\sqrt{AA\quad BB}}{aa}$	$s=\frac{\sqrt{AA-BB}}{aa}$
150	19.22	OLD, OLI,	OLD, OLI
154	8	$(z-bh)$	$(z+bh)$


Lamina 1.a
fig.a 1.a
2
3
4
5
6
R
Q+x


Lamina 2.ª
14
7
8
15
9
10
11
12
13
16


Lamina 3.ª
17
18
19
20
21
22
23
24

Lamina 4ª.



A B Q R M p s L P S G′ 25 N K G G″ C H h E H′ F h″ H″ D
C G O M H K l O′ L Q I D 26 V A
C G H O M K O′ l L Q D P I 27 V R A
C M O L R Q N I 28 D H G E a S F T